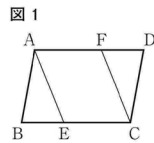


数学 9 証明を振り返り、統合的・発展的に考察すること（平行四辺形）

9 右の図1のように、平行四辺形ABCDの辺BC、DA上に、BE = DFとなる点E、Fをそれぞれとります。
 このとき、四角形AECFは平行四辺形になります。このことは、次のように証明できます。



証明1

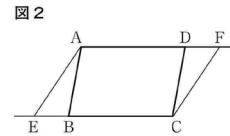
平行四辺形の向かい合う辺は平行だから、
 $AD \parallel BC$
 よって、 $AF \parallel EC$ ……①
 平行四辺形の向かい合う辺は等しいから、
 $AD = BC$ ……②
 仮定より、
 $DF = BE$ ……③
 ②、③より、
 $AD - DF = BC - BE$ ……④
 ④より、
 $AF = EC$ ……⑤
 ①、⑤より、
 1組の向かい合う辺が平行でその長さが等しいから、
 四角形AECFは平行四辺形である。

次の(1)から(3)までの各問に答えなさい。

(1) 証明1では、四角形AECFが平行四辺形であることを証明しました。四角形AECFが平行四辺形であることから、新たにわかることがあります。それを下のアからエまでの中から1つ選びなさい。

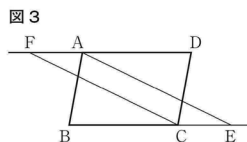
- ア $BE = DF$ イ $AF = EC$
 ウ $AE = FC$ エ $AB = DC$

(2) 次の図2のように、平行四辺形ABCDの辺CB、ADを延長した直線上に、BE = DFとなる点E、Fをそれぞれとって、四角形AECFは平行四辺形になります。このことは、前ページの証明1の一部を書き直すことで証明できます。書き直すことが必要な部分を、下のアからオまでの中から1つ選び、正しく書き直しなさい。



ア	平行四辺形の向かい合う辺は平行だから、 $AD \parallel BC$ よって、 $AF \parallel EC$ ……①
イ	平行四辺形の向かい合う辺は等しいから、 $AD = BC$ ……②
ウ	仮定より、 $DF = BE$ ……③
エ	②、③より、 $AD - DF = BC - BE$ ……④
オ	④より、 $AF = EC$ ……⑤ ①、⑤より、 1組の向かい合う辺が平行でその長さが等しいから、 四角形AECFは平行四辺形である。

(3) 次の図3のように、平行四辺形ABCDの辺BC、DAを延長した直線上に、BE = DFとなる点E、Fをそれぞれとります。



このとき、四角形FCEAは平行四辺形になります。このことは、次のように証明できます。

証明2

平行四辺形の向かい合う辺は平行だから、
 $AD \parallel BC$
 よって、 $FA \parallel CE$ ……①
 平行四辺形の向かい合う辺は等しいから、
 $AD = BC$ ……②
 仮定より、
 $DF = BE$ ……③
 ②、③より、
 $DF - AD = BE - BC$ ……④
 ④より、
 $FA = CE$ ……⑤
 ①、⑤より、
 1組の向かい合う辺が平行でその長さが等しいから、
 四角形FCEAは平行四辺形である。

さらに、次の図4のように、辺ABと線分FCの交点をG、辺DCと線分AEの交点をHとすると、四角形AGCHも平行四辺形になります。

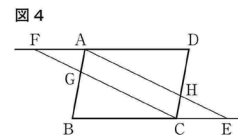


図4において、四角形AGCHが平行四辺形になることは、2組の向かい合う辺がそれぞれ平行であることを示すことで証明できます。四角形AGCHが平行四辺形になることを証明しなさい。ただし、四角形FCEAが平行四辺形であることはすでにわかっていることとします。

出題の趣旨

図形の性質を考察する場面において、次のことができるかどうかをみる。

- ・ 解決の過程や結果を振り返り評価・改善すること
- ・ 統合的・発展的に考察すること
- ・ 筋道を立てて考え、事柄が成り立つ理由を説明すること

図形の性質を考察する場面では、予想した事柄が成り立つことを証明したり、条件を変えて共通する性質を見いだすなど統合的・発展的に考察したりすることや、問題解決の過程や結果を振り返って新たな性質を見いだすことが大切である。

本問では、見いだした事柄について、平行四辺形の性質や平行四辺形になるための条件を用いて考察する場面を取り上げた。具体的には、**図1**で四角形AECFが平行四辺形であることの証明を基に、新たに分かる辺や角についての関係を見いだす状況を設けた。さらに、**図1**から**図2**のように条件を変えた場合にできる四角形AECFが平行四辺形になることを、**証明1**を基に証明する状況を設けた。また、**図1**から**図3**のように条件を変えた場合にできる四角形FCEAが平行四辺形であることを基に、**図4**の四角形AGCHが平行四辺形になることを証明する文脈を設定した。

設問(1)

趣旨

証明を振り返り、証明された事柄を基にして、新たに分かる辺や角についての関係を見いだすことができるかどうかをみる。

■学習指導要領における領域・内容

〔第2学年〕 B 図形

(2) 図形の合同について、数学的活動を通して、次の事項を身に付けることができるよう指導する。

ア 次のような知識及び技能を身に付けること。

(イ) 証明の必要性和意味及びその方法について理解すること。

1. 解答類型と反応率

問題番号	解 答 類 型		反応率 (%)	正答	
9	(1)	1	ア と解答しているもの。(BE=DF)	10.1	◎
		2	イ と解答しているもの。(AF=EC)	13.3	
		3	ウ と解答しているもの。(AE=FC)	58.8	
		4	エ と解答しているもの。(AB=DC)	16.6	
		99	上記以外の解答	0.0	
		0	無解答	1.1	

2. 分析結果と課題

- 解答類型1の中には、この問題の仮定である $BE = DF$ を、新たに分かることと捉えた生徒がいると考えられる。
- 解答類型2の中には、証明で記述されている $AF = EC$ を、新たに分かることと捉えた生徒がいると考えられる。
- 解答類型4の中には、四角形 $ABCD$ が平行四辺形であることから分かる $AB = DC$ を、新たに分かることと捉えた生徒がいると考えられる。
- 平成30年度【中学校】数学B⁴(1)で関連する問題を出題している（正答率56.0%）。「平成30年度【中学校】報告書」において、「証明を振り返り、証明された事柄を基にして、新たな性質を見いだすこと」に課題があると分析している。これに関連して本設問では、「四角形 $AECF$ が平行四辺形であることの証明を振り返り、新たに分かることを選ぶ」問題を出題した（正答率58.8%）。今回の結果から、証明を振り返り、証明された事柄を基にして、新たに分かる辺や角についての関係を見いだすことに引き続き課題があると考えられる。

3. 学習指導に当たって

○ 証明を振り返り、新たに分かる辺や角の関係を見いだすことができるようにする

予想した事柄が成り立つことを証明した後、問題で与えられた条件や証明を改めて振り返る場面を設定し、新たに分かる関係を見いだすことができるように指導することが大切である。

本設問を使って授業を行う際には、四角形 $AECF$ が平行四辺形であることから、新たに分かる辺の関係として、 $AE \parallel FC$ 、 $AE = FC$ を見いだす活動を取り入れることが考えられる。具体的には、四角形 $AECF$ が平行四辺形になることを証明した後、仮定や仮定から分かる辺の関係を図や証明から見いだして整理し、四角形 $AECF$ が平行四辺形であることから新たに分かる辺の関係を見いだすことができるようにすることが大切である。

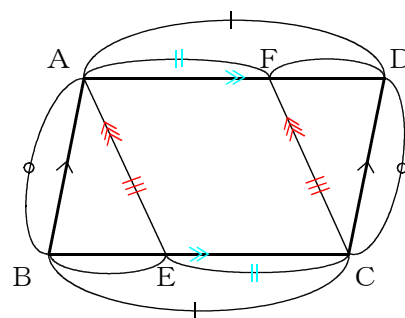
なお、角についても同様に考え、新たに分かる角の関係を見いだす活動を取り入れることも考えられる。

I 仮定や平行四辺形 $ABCD$ から分かる辺の関係

$$\begin{aligned} BE &= DF, BE \parallel DF \\ AB &= DC, AB \parallel DC \\ AD &= BC, AD \parallel BC \\ AF &= EC, AF \parallel EC \end{aligned}$$

II 四角形 $AECF$ が平行四辺形であることから分かる辺の関係

$$\begin{aligned} AE &= FC, AE \parallel FC \\ AF &= EC, AF \parallel EC \end{aligned}$$



II にあって、I にない辺の関係

$$AE = FC, AE \parallel FC$$



新たに分かる辺の関係

設問(2)

趣旨

統合的・発展的に考え、条件を変えた場合について、証明を評価・改善することができるかどうかをみる。

■学習指導要領における領域・内容

〔第2学年〕 B 図形

(2) 図形の合同について、数学的活動を通して、次の事項を身に付けることができるよう指導する。

イ 次のような思考力、判断力、表現力等を身に付けること。

(ア) 三角形の合同条件などを基にして三角形や平行四辺形の基本的な性質を論理的に確かめたり、証明を読んで新たな性質を見いだしたりすること。

1. 解答類型と反応率

問題番号		解 答 類 型		反応率 (%)	正答	
9	(2)	1	エ を るもの。(AF = ECを導けるものを含む)	②、③より、 $AD + DF = BC + BE$ ……④ と記述しているもの。	37.0	◎
		2	選	上記以外の解答	12.4	
		3	択	無解答	5.9	
		4	オ を 記述しているもの。	AF = ECが成り立つ根拠を記述し、AF = EC ……⑤ と	0.0	◎
		5	選	上記以外の解答	4.2	
		6	択	無解答	2.7	
		7		アを選択し、記述しているもの。	6.1	
		8		イを選択し、記述しているもの。	8.3	
		9		ウを選択し、記述しているもの。	5.3	
		10		ア、イ、ウのいずれかを選択し、無解答であるもの。	10.5	
		99		上記以外の解答	0.5	
		0		無解答	7.1	
正答率				37.0		

2. 分析結果と課題

○ 解答類型2では、「 $AF - DF = EC - BE$ 」という解答がみられた。この中には、書き直す部分は捉えているが、「 $AF = AD + DF$ 」、「 $EC = BC + BE$ 」と捉えることができなかった生徒がいると考えられる。

○ 平成30年度【中学校】数学B⁴(2)で関連する問題を出題している（正答率43.3%）。「平成30年度【中学校】報告書」において、「発展的に考え、条件を変えた場合について、証明の一部を書き直すこと」に課題があると分析している。これに関連して本設問では、「平行四辺形ABCDの辺CB、ADを延長した直線上に $BE = DF$ となる点E、Fを取っても、四角形AECFは平行四辺形となることの証明を完成する」問題を出題した（正答率37.0%）。今回の結果から、統合的・発展的に考え、条件を変えた場合について、証明を評価・改善することに引き続き課題があると考えられる。

3. 学習指導に当たって

○ 元の証明を評価・改善することを通して、条件を変えた場合の証明ができるようにする

証明したことを基に、条件を変えた場合の証明について考察する場面を設定し、条件を変えても変わらない関係や、条件を変えると変わる関係を見だし、元の証明を評価・改善することを通して、条件を変えた場合の証明ができるように指導することが大切である。

本設問を使って授業を行う際には、**証明1**と**図2**を関連付けて読み、**証明1**の①から⑤の中で変わらない関係と変わる関係について確認する活動を取り入れることが考えられる。例えば、②「 $AD = BC$ 」、③「 $DF = BE$ 」は**図2**においても変わらない関係であることのように、書き直す必要がない部分があることを確かめることが大切である。

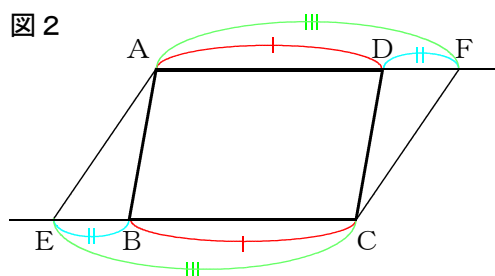
さらに、**証明1**では、④「 $AD - DF = BC - BE$ 」であることを根拠に⑤「 $AF = EC$ 」を示しているが、④の関係を示す長さの辺が**図2**にはないことに気付けるようにすることが大切である。

その上で、④以降の証明をどのように書き直せばよいかを検討する活動を取り入れることが考えられる。その際、**図2**において、④を「 $AD + DF = BC + BE$ 」に書き直す必要があるが、⑤は書き直す必要がないと判断するなどして、条件を変えた場合の証明ができるように指導することが大切である。

証明1

平行四辺形の向かい合う辺は平行だから、
 $AD \parallel BC$
 よって、 $AF \parallel EC$ ……①
 平行四辺形の向かい合う辺は等しいから、
 $AD = BC$ ……②
 仮定より、
 $DF = BE$ ……③
 ②、③より、
 $AD - DF = BC - BE$ ……④
 ④より、
 $AF = EC$ ……⑤
 ①、⑤より、
 1組の向かい合う辺が平行でその長さが等しいから、
 四角形AECFは平行四辺形である。

図2



設問(3)

趣旨

ある事柄が成り立つことを構想に基づいて証明することができるかどうかをみる。

■学習指導要領における領域・内容

〔第2学年〕 B 図形

(2) 図形の合同について、数学的活動を通して、次の事項を身に付けることができるよう指導する。

イ 次のような思考力、判断力、表現力等を身に付けること。

(イ) 三角形や平行四辺形の基本的な性質などを具体的な場面で活用すること。

1. 解答類型と反応率

問題番号	解答類型	反応率 (%)	正答	
9	(3) (正答の条件) 次の(a)、(b)、(c)とそれぞれの根拠を記述し、証明しているもの。 なお、ここで根拠として求める記述は、正答例に記述されている程度のもとする。 (a) $AG \parallel HC$ (b) $GC \parallel AH$ (c) 四角形AGCHは平行四辺形である。 ----- (正答例) ・ 平行四辺形ABCDの向かい合う辺は平行であるから、 $AB \parallel DC$ よって、 $AG \parallel HC$ ……① 平行四辺形FCEAの向かい合う辺は平行であるから、 $FC \parallel AE$ よって、 $GC \parallel AH$ ……② ①、②より、2組の向かい合う辺がそれぞれ平行であるから、 四角形AGCHは平行四辺形である。 (解答類型1)			
	1	(a)、(b)、(c)とそれぞれの根拠を記述しているもの。	17.1	◎
	2	(a)、(b)、(c)について記述しているが、表現が十分でないもの。 ((a)、(b)、(c)の根拠が抜けていたり、根拠の表現が十分でなかったりするものを含む。)	7.7	○
	3	上記1、2以外で、正しく証明しているもの。	3.5	◎
	4	上記3について、表現が十分でないもの。(根拠が抜けていたり、根拠の表現が十分でなかったりするものを含む。)	5.5	○
	5	(a)、(b)、(c)について記述しているが、証明に誤りを含んでいるもの。	1.0	
	6	(a)、(b)について記述しているもの。((a)、(b)について、表現が十分でなかったり、根拠が抜けていたり、根拠の表現が十分でなかったりするものを含む。)	3.3	
	7	(c)のみを記述しているもの。((c)について、表現が十分でなかったり、根拠が抜けていたり、根拠の表現が十分でなかったりするものを含む。)	9.4	
	8	上記6、7について、証明に誤りを含んでいるもの。	2.1	
	99	上記以外の解答	19.3	
0	無解答	31.2		
	正答率	33.8		

2. 分析結果と課題

- 正答率は 33.8% であり、ある事柄が成り立つことを構想に基づいて証明することに課題がある。
- 解答類型99の具体的な例としては、以下のようなものがある。

(例)

- ・ $\triangle GBC$ と $\triangle HDA$ において
 $BC = AD$

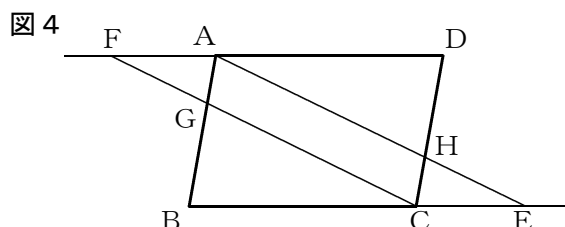
このように記述した生徒は、 $\triangle GBC$ と $\triangle HDA$ に着目し、三角形の合同条件を用いて証明しようとしたと考えられる。

3. 学習指導に当たって

○ 方針を立て、証明することができるようにする

事柄が成り立つことを証明できるようにするためには、仮定や仮定から分かる事柄、結論を導くために必要な事柄を明らかにするなどして証明の方針を立て、その方針を基に推論の過程を数学的に表現できるように指導することが大切である。

本設問を使って授業を行う際には、証明すべき事柄を明確にした上で、その根拠を見いだす活動を取り入れることが考えられる。例えば、**図4**において、四角形AGCHが平行四辺形になるという結論を導くために、平行四辺形になるための条件を手掛かりとして、仮定や**証明2**を基に検討し、 $AG \parallel HC$ 、 $GC \parallel AH$ を示せばよいという方針を立てることが考えられる。その上で、仮定である「四角形ABCDは平行四辺形である」と**証明2**で明らかにされた事柄である「四角形FCEAは平行四辺形である」に基づいて、 $AG \parallel HC$ 、 $GC \parallel AH$ のそれぞれの根拠として $AB \parallel DC$ 、 $FC \parallel AE$ を見いだせるようにし、根拠や成り立つ事柄を言葉や記号を適切に用いて証明できるように指導することが大切である。

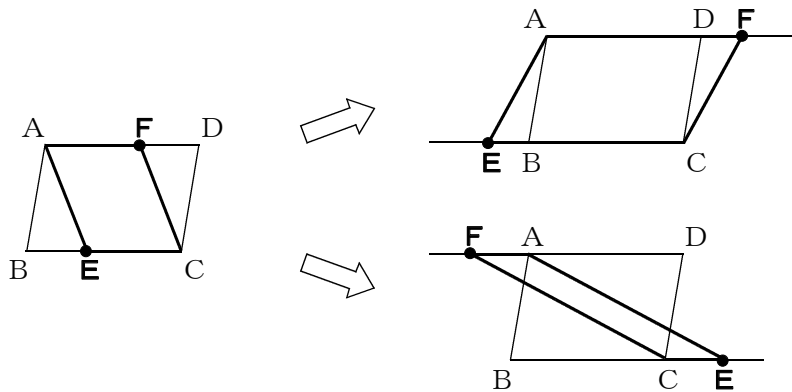


本問全体の学習指導に当たって

- 問題の条件を変えて共通する性質を見いだすなど、統合的・発展的に考察することができるようにする

図形の性質を考察する場面では、条件を変えても同様の性質が成り立つかどうかを検討するなど、統合的・発展的に考察することができるように指導することが大切である。

例えば、本問のように、平行四辺形ABCDの辺BC、DA上に、 $BE = DF$ となる点E、Fをそれぞれとったときに、四角形AECFが平行四辺形であることを見だし、証明する場面を設定することが考えられる。その上で、次の図のように「辺BC、DA上」を「辺BC、DAをそれぞれ頂点B、Dの方向に延長した直線上」や「辺BC、DAをそれぞれ頂点C、Aの方向に延長した直線上」に変えても四角形AECFが平行四辺形になることを明らかにする活動を取り入れることが大切である。



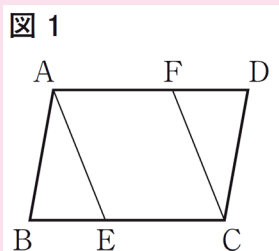
具体的には、**証明 1**において、四角形AECFが平行四辺形になることの根拠が $AF \parallel EC$ 、 $AF = EC$ であることに着目し、点E、Fをとる位置を変えた場合のAFとECの関係（ $AF \parallel EC$ 、 $AF = EC$ ）が変わるのかどうかを考察する場面を設定することが考えられる。その際、点E、Fをとる位置を変えても点E、Fはそれぞれ辺DA、辺BCの延長線上にあることから、 $AF \parallel EC$ は変わらないことを明らかにすることが大切である。また、点E、Fをとる位置を変えても $AD = BC$ 、 $DF = BE$ は変わらないことに着目し、線分AFの長さと線分ECの長さの関係（ $AF = EC$ ）も変わらないことを明らかにすることが大切である。

その上で、平行四辺形ABCDにおいて、直線BC、DA上に $AF \parallel EC$ 、 $AF = EC$ が成り立つように点E、Fをとれば、4点A、E、C、Fを結んでできる四角形は平行四辺形になると統合的・発展的に考察できるようにすることが大切である。

このような活動を通して、条件を変えても同様の性質が成り立つのかという疑問をもち、自分なりに探究していこうとする態度を養うことも大切である。

「すでに完成した証明の一部を書き直すことで、新しい証明を完成させよう」
 ～問題の条件を変えた場合の証明をするために、元の証明を評価・改善する～

前の時間では、平行四辺形ABCDの辺BC、DA上に、 $BE = DF$ となる点E、Fをそれぞれとると、四角形AECFは平行四辺形になることを証明しました。



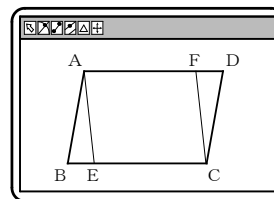
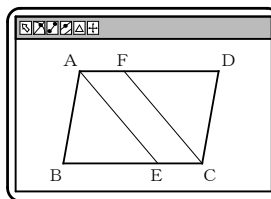
証明 1

平行四辺形の向かい合う辺は平行だから、
 $AD \parallel BC$
 よって、 $AF \parallel EC$ ……①
 平行四辺形の向かい合う辺は等しいから、
 $AD = BC$ ……②
 仮定より、
 $DF = BE$ ……③
 ②、③より、
 $AD - DF = BC - BE$ ……④
 ④より、
 $AF = EC$ ……⑤
 ①、⑤より、
 1組の向かい合う辺が平行でその長さが等しいから、
 四角形AECFは平行四辺形である。

1. 点E、Fの位置を変えた場合について考える。



図1について、辺BC、DA上で点E、Fを他の位置に変えたとき、四角形AECFは平行四辺形になるといえるでしょうか。



平行四辺形になりそうです。



図1と形が変わっているから、また証明しないとイケないよね。



図の形が変わっても証明1と同じ証明になるね。



点E、Fがそれぞれ辺BC、DA上にある限り、①～⑤はすべて変わらないから、新たに証明する必要はないね。

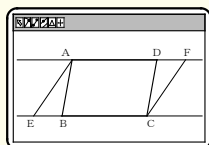


辺AD、BC上で点E、Fの位置を変えるときは、証明1で証明できていますね。では、辺BC、DAを直線BC、DAとして、点E、Fを他の位置に変えたときはどうなるでしょうか。

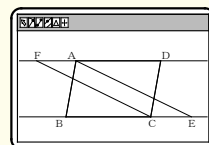
ポイント



点E、Fを外側にとると、こんな図になったよ。
 この場合も四角形AECFは平行四辺形になりそうだな。



こういう場合もあるよ。
 この場合も四角形AECFは平行四辺形になりそう。



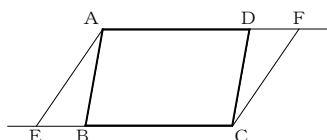
点Eの位置は、辺BCのBの方向に延長した直線上と、辺BCのCの方向に延長した直線上の2通りの場合があるね。

2. 元の証明について書き直す部分を考える。



2通りの場合がありますね。まず、図2で、四角形AECFが平行四辺形になるかどうかを確かめてみましょう。

図2



【図2の説明】

平行四辺形の辺BC、DAをそれぞれB、Dの方向に延長した直線上に $BE = DF$ となる点E、Fをそれぞれとります。



点E、Fが辺BC、DA上にあるときは証明1で証明できていましたが、図2についても証明1で証明できているのでしょうか。



「辺BC、DA上」を「辺BC、DAをそれぞれB、Dの方向に延長した直線上」と変えたので証明1で証明できているのか分からないから確かめてみたいです。



証明1と図1を基にして、証明1の①～⑤の書き直す必要がある部分や書き直す必要がない部分について確かめ、証明1で証明できているか考えてみましょう。

ポイント



「 $AF \parallel EC \dots \textcircled{1}$ 」については、平行の位置関係は変わらないから、書き直す必要はないね。

図1

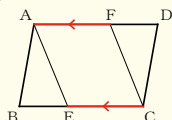
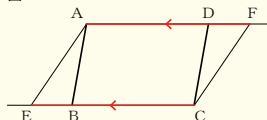


図2



「 $AD = BC \dots \textcircled{2}$ 」、「 $DF = BE \dots \textcircled{3}$ 」については、変わっていないから書き直す必要はないね。

図1

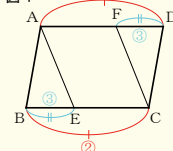
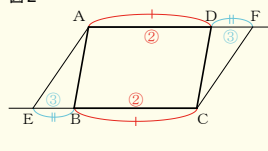


図2



「 $AD - DF = BC - BE \dots \textcircled{4}$ 」については、図2の様子からそのままでは使えなさそうだから書き直す必要があるよね。

図1

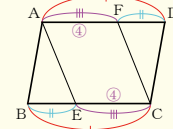
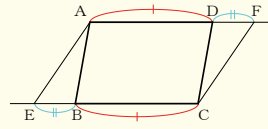


図2



④を書き直すと「 $AF = EC \dots \textcircled{5}$ 」も書き直す必要があるかもしれないね。



証明1の④は書き直す必要があるそうですね。それでは、④を書き直した証明を考えて⑤を書き直す必要があるかどうかを判断してみましょう。

<p>(証明1)</p> <p>平行四辺形の向かい合う辺は平行だから $AD \parallel BC$ よって、$AF \parallel EC$ …① 平行四辺形の向かい合う辺は等しいから $AD = BC$ …② 仮定より、 $DF = BE$ …③ ②、③より、 $AD - DF = BC - BE$ …④ ④より、 $AF = EC$ …⑤ ①、⑤より 1組の向かい合う辺が平行でその長さが等しいから、四角形AECFは平行四辺形である。</p>	<p>(証明2)</p> <p>平行四辺形の向かい合う辺は平行だから $AD \parallel BC$ よって、$AF \parallel EC$ …① 平行四辺形の向かい合う辺は等しいから $AD = BC$ …② 仮定より、 $DF = BE$ …③ ②、③より、 $AD + DF = BC + BE$ …④ ④より、 $AF = EC$ …⑤ ①、⑤より 1組の向かい合う辺が平行でその長さが等しいから、四角形AECFは平行四辺形である。</p>



⑤以降は変えなくても正しく証明できているね。

3. 証明を振り返り、統合的・発展的に考察する。



今日の授業で分かったことや大切だと思った考え方、もっと知りたいことなどをノートに書いてみましょう。

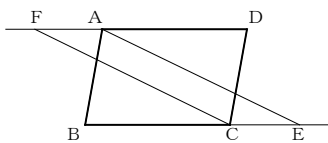
点をとる位置が変わっても結論が変わらない場合があることが分かった。その場合、一から証明するのではなく、前の証明を基にして、変わる部分だけを修正することで証明できることが分かった。

点をとる位置をいろいろと変えてみて、どんな場合に平行四辺形になるか、また、どんな場合に平行四辺形にならなくなるのか調べてみたい。他の図形の証明の問題でも条件をいろいろ変えた場合に同じことがいえるのか考えてみたい。



図3の場合も図1や図2で書いた証明を書き直すことで証明できるか考えてみましょう。

図3



【図3の説明】

平行四辺形の辺BC、DAをそれぞれC、Aの方向に延長した直線上にBE = DFとなる点E、Fをそれぞれとります。

本授業アイデア例 活用のポイント!

- 条件を変えた場合の証明を考える際に、元の証明を図と関連付けて読みながら、元の証明のどこを変えればよいのか検討し、証明できるようにすることが大切である。
- 条件を変える前と条件を変えた後の証明を比べて、関係が変わらず成り立つものに着目し、統合的・発展的に考察できるようにすることが大切である。