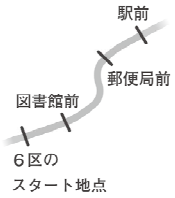
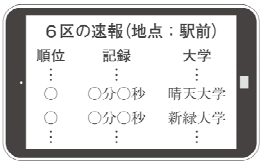
数学8　日常的な事象の数学化と問題解決の方法（駅伝）

8　大悟さんが住む地域にある新緑大学は、大学対抗駅伝大会に出場します。この駅伝大会では、コースを7区間に分け、1区から7区までをリレー形式で走ります。大悟さんは、新緑大学の6区の選手の応援に行きました。6区の道のりは12000 mあり、6区のスタート地点では、晴天大学が先にスタートし、新緑大学がその100秒後にスタートしました。



大悟さんは、インターネットで6区の速報を見て、新緑大学が晴天大学に追いつきそうだと考え、その地点を予想することにしました。



そこで、大悟さんは、晴天大学と新緑大学の6区の各地点の記録を、晴天大学の6区の選手がスタートしたときを0秒として、下のような表にまとめました。

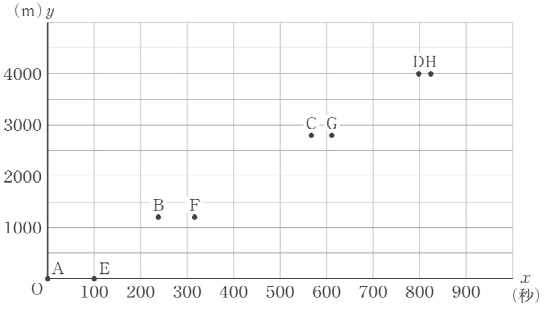
大悟さんがまとめた表

地点	スタート地点からの道のり	晴天大学	新緑大学
スタート地点	0 m	0 秒	100 秒
図書館前	1200 m	238 秒	316 秒
郵便局前	2800 m	567 秒	611 秒
駅前	4000 m	798 秒	824 秒

前ページの**大悟さんがまとめた表**の記録について、例えば、新緑大学の「316秒」は、晴天大学がスタート地点をスタートしてから316秒後に、新緑大学が図書館前を通過したことを表しています。

大悟さんは、晴天大学の6区の選手がスタートしてからの時間をx秒、6区の選手が走った道のりをy mとし、前ページの**大悟さんがまとめた表**をもとに下のようなグラフに表しました。点Aから点Dが晴天大学、点Eから点Hが新緑大学を表しています。

6区の選手の記録のグラフ

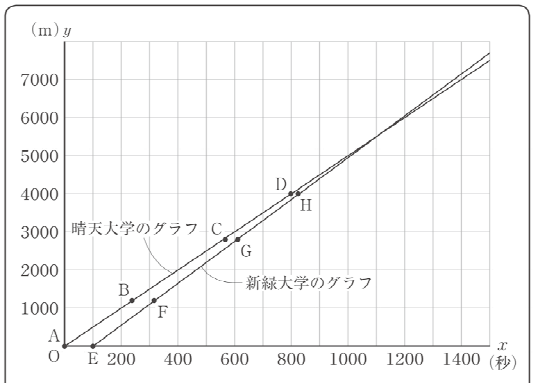


次の(1)から(3)までの各問いに答えなさい。

(1) 晴天大学が駅前を通過した時間と新緑大学が駅前を通過した時間の差は、上の**6区の選手の記録のグラフ**に表された点Aから点Hのうち、2つの点のx座標の差に表れます。点Aから点Hまでの中から、その2つの点を選んで書きなさい。

(2) 大悟さんは、前ページの**6区の選手の記録のグラフ**を見て、点Aから点Dまで、点Eから点Hまでの各点がそれぞれ一直線上にあると考えることにしました。そこで、コンピュータを使って、次のような2つの直線に表したところ、それぞれのxとyの関係を表す式は、晴天大学が$y = 5x$、新緑大学が$y = 5.5x - 550$と表されました。

コンピュータを使って表された直線のグラフと式



晴天大学の式　$y = 5x$

新緑大学の式　$y = 5.5x - 550$

晴天大学のグラフと新緑大学のグラフがそれぞれ直線で表されていることは、二人の選手について次のように考えたことになります。

晴天大学のグラフと新緑大学のグラフがそれぞれ直線で表されていることは、二人の選手について、［　　］が一定であると考えたことになります。

上の［　　］に当てはまる言葉として正しいものを、下のアからオまでの中から1つ選びなさい。

ア　それぞれの走る速さ

イ　それぞれの走る時間

ウ　それぞれの走る道のり

エ　走る時間の差

オ　走る道のりの差

(3) 新緑大学が晴天大学に追いつくのが、6区のスタート地点からおよそ何mの地点になるのかを考えます。下のア、イのどちらかを選び、それを用いておよそ何mの地点になるのかを求める方法を説明しなさい。ア、イのどちらを選んで説明してもかまいません。また、実際に何mかを求める必要はありません。

ア　晴天大学のグラフと新緑大学のグラフ

イ　晴天大学の式と新緑大学の式

出題の趣旨

事象における数量の関係を見いだし考察する場面において、次のことができるかどうかをみる。
・数学的に表現したことを事象に即して解釈すること
・事象を理想化したり単純化したりすること
・問題解決の方法を数学的に説明すること

日常生活や社会の事象を考察する場面では、事象を理想化したり単純化したりして、その特徴を的確に捉え、事象を数学的に解釈することが求められる場合がある。その際、問題解決の方法を考え、それを数学的に説明することが大切である。

本問では、駅伝について、新緑大学の選手が晴天大学の選手に追いつく地点を予想する場面を取り上げた。この場面において、**大悟さんがまとめた表**を基につくったグラフを直線で表したことは、二人の選手についてどのように考えたことになるかを捉える文脈を設定した。さらに、新緑大学の選手が６区のスタート地点からおよそ何ｍの地点で晴天大学の選手に追いつくのかを求める方法を説明する文脈を設定した。

設問（１）

趣旨

与えられた表やグラフから、必要な情報を適切に読み取ることができるかどうかをみる。

■学習指導要領における領域・内容

〔第２学年〕　C　関数

(1)　一次関数について、数学的活動を通して、次の事項を身に付けることができるよう指導する。

ア　次のような知識及び技能を身に付けること。

（ア）一次関数について理解すること。

イ　次のような思考力、判断力、表現力等を身に付けること。

（ア）一次関数として捉えられる二つの数量について、変化や対応の特徴を見いだし、表、式、グラフを相互に関連付けて考察し表現すること。

１．解答類型と反応率

問題番号		解答類型		反応率（%）	正答
8	(1)	1	点D、点H　　と解答しているもの。（順番は不問。以下同様）	58.1	◎
		2	点A、点E　　と解答しているもの。	3.4	
		3	点B、点F　　と解答しているもの。	4.1	
		4	点C、点G　　と解答しているもの。	4.0	
		5	点Aと点Eのどちらかと、点Dと点Hのどちらかを解答しているもの。	3.9	
		99	上記以外の解答	18.0	
		0	無解答	8.5	

２．分析結果と課題

○　正答率は 58.1% であり、与えられた表やグラフから、必要な情報を適切に読み取ることに課題がある。

○　解答類型２、３、４の反応率の合計は 11.5% であり、同じ地点の記録を表す二つの点を取り上げることはできているが、スタート地点からの道のりが 4000 mである「駅前」について、グラフから捉えることができなかった生徒がいると考えられる。

○　解答類型99の中には、「点B、点G」や「点C、点F」という解答がみられた。これらは、二つの大学からそれぞれ１点ずつ取り上げることはできているが、同じ地点の記録を表す二つの点を取り上げることができなかった生徒がいると考えられる。

３．学習指導に当たって

○　与えられた表やグラフから、必要な情報を適切に読み取ることができるようにする

表やグラフと具体的な事象を対応させ、グラフ上の点が具体的な事象では何を表しているのかを捉える活動を取り入れ、与えられた表やグラフから必要な情報を適切に読み取ることができるように指導することが大切である。

本設問を使って授業を行う際には、晴天大学と新緑大学の選手の走った様子を知るために作った**６区の選手の記録のグラフ**において、それぞれの点が何を表しているのかを読み取ることができるように指導することが考えられる。

例えば、**６区の選手の記録のグラフ**から、二つの大学の選手について分かることを読み取る場面を設定することが大切である。その際、y 座標が同じ値で x 座標が異なる２点の組が複数あることに気付き、それがどのようなことを表しているかについて**大悟さんがまとめた表**と関連させながら話し合う活動を取り入れることが考えられる。このとき、点Dと点Hの y 座標はスタート地点から駅前までの道のり、x 座標は駅前を通過する時間をそれぞれ表しており、２点の x 座標の差は二人の選手が駅前を通過した時間の差であると捉えられるようにすることが大切である。さらに、他の２点の組も同じように捉え、x 座標の差の変化について検討することが考えられる。

設問（2）

趣旨

事象を理想化・単純化することで表された直線のグラフを、事象に即して解釈することができるかどうかをみる。

■学習指導要領における領域・内容

〔第２学年〕　C　関数

(1)　一次関数について、数学的活動を通して、次の事項を身に付けることができるよう指導する。

ア　次のような知識及び技能を身に付けること。

（イ）事象の中には一次関数として捉えられるものがあることを知ること。

１．解答類型と反応率

問題番号		解答類型			反応率（%）	正答
8	(2)	1	**ア**	と解答しているもの。（それぞれの走る速さ）	62.2	◎
		2	**イ**	と解答しているもの。（それぞれの走る時間）	9.2	
		3	**ウ**	と解答しているもの。（それぞれの走る道のり）	16.9	
		4	**エ**	と解答しているもの。（走る時間の差）	6.8	
		5	**オ**	と解答しているもの。（走る道のりの差）	3.7	
		99	上記以外の解答		0.2	
		0	無解答		1.0	

２．分析結果と課題

○　解答類型３の中には、二人の選手が走る６区の道のりが同じであることから、二つの大学のグラフが直線で表されていることは、二人の選手について、それぞれの走る道のりが一定であると捉えた生徒がいると考えられる。

○　平成30年度【中学校】数学B 3 (1)（正答率68.3%）で類題を出題しており、事象を理想化・単純化することで表された直線のグラフを、事象に即して解釈することに課題がある。これに関連して本設問では、「二人の選手のグラフが直線で表されていることの前提となっている事柄を選ぶ」問題を出題した（正答率62.2%）。今回の結果から、直線のグラフを事象に即して解釈することに引き続き課題があると考えられる。

３．学習指導に当たって

○　数学的に表現された結果を事象に即して解釈することができるようにする

数学的に表現された結果を事象に即して解釈することができるように指導することが大切である。その際、問題の中で理想化・単純化されているものを確認する場面を設定することが大切である。

本設問を使って授業を行う際には、**大悟さんがまとめた表**を基に点をとり、それぞれの点が一直線上にあると考えてグラフを直線で表すことが、どのような仮定に基づいているのかを捉える場面を設定することが考えられる。その際、グラフが直線であるということは、変化の割合が一定であることを表し、x が時間、y が道のりを表していることから、それぞれの走る速さは一定であると考えたことになると捉えることができるように指導することが大切である。

設問（３）

趣旨

事象を数学的に解釈し、問題解決の方法を数学的に説明することができるかどうかをみる。

■学習指導要領における領域・内容

〔第２学年〕　C　関数

(1)　一次関数について、数学的活動を通して、次の事項を身に付けることができるよう指導する。

イ　次のような思考力、判断力、表現力等を身に付けること。

（イ）一次関数を用いて具体的な事象を捉え考察し表現すること。

１．解答類型と反応率

問題番号		解答類型			反応率（%）	正答
8	(3)	（正答の条件） **ア**を選択し、次の(a)について記述しているもの、又は、**イ**を選択し、次の(b)について記述しているもの。 (a)　グラフの交点から、yの値を読み取ること。 (b)　方程式を解いて、yの値を求めること。 （正答例） 〈**ア**を選択した場合〉 ・　晴天大学のグラフと新緑大学のグラフについて、２つの直線のグラフの交点からy座標を読み取り、スタート地点からおよそ何mの地点で追いつくのかを求める。（解答類型１） 〈**イ**を選択した場合〉 ・　晴天大学の式と新緑大学の式について、２つの式から連立方程式をつくり、それを解いてyの値を求め、スタート地点からおよそ何mの地点で追いつくのかを求める。（解答類型７）				
		1	**ア**を選択	(a)について記述しているもの。	5.7	◎
		2		(a)についての記述が十分でないもの。 （正答例） ・　交点の座標を読み取る。	22.7	○
		3		(a)について「交点」についての記述がないもの。	0.4	
		4		(a)についてグラフを用いることのみを記述しているもの。	4.6	
		5		上記以外の解答	5.6	
		6		無解答	10.3	

		7	イを選択	(b)について記述しているもの。	6.5	◎
		8		(b)についての記述が十分でないもの。 （正答例） ・　連立方程式を解く。 ・　方程式をつくり、yの値を求める。	8.1	○
		9		(b)について「方程式」についての記述がないもの。	1.0	
		10		(b)について方程式を用いることのみを記述しているもの。	6.3	
		11		上記以外の解答	7.8	
		12		無解答	7.4	
		99		上記以外の解答	0.7	
		0		無解答	13.0	
				正答率	42.9	

2．分析結果と課題

○　解答類型10の具体的な例としては、以下のようなものがある。

（例）
・　晴天大学の式と新緑大学の式を連立方程式の形にすればよい。

このように記述した生徒は、二つの大学のそれぞれの式を連立方程式とみることはできているが、その用い方として、方程式を解いて y の値を求めることを表現することができなかったと考えられる。

○　解答類型11の具体的な例としては、以下のようなものがある。

（例）
・　晴天大学の式と新緑大学の式から連立方程式をつくり、それを解いて x の値を求めればよい。

このように記述した生徒は、用い方として、方程式を解くことは記述できているが、求めるyの値をxの値と混同して捉えたと考えられる。

○　平成28年度【中学校】数学B 3 (3)（正答率31.2%）及び平成31（令和元）年度【中学校】数学 6 (2)（正答率35.6%）で類題を出題している。「平成28年度【中学校】報告書」及び「平成31年（令和元）度【中学校】報告書」において、「事象を数学的に解釈し、問題解決の方法を数学的に説明すること」に課題があると分析している。これに関連して本設問では、「グラフや式を用いて、新緑大学の選手が晴天大学の選手に追いつくのが、６区のスタート地点からおよそ何mの地点になるかを求める方法を説明すること」をみる問題を出題した(正答率42.9%)。今回の結果から、事象を数学的に解釈し、問題解決の方法を数学的に説明することに、引き続き課題がある。

３．学習指導に当たって

○　問題解決のために数学を活用する方法を考え、説明できるようにする

様々な問題を数学を活用して解決できるようにするために、表、式、グラフなどを用いて問題解決する場面を設定し、それらをどう用いたかについて数学的に説明できるように指導することが大切である。

本設問を使って授業を行う際には、新緑大学が晴天大学に追いつく地点を求める方法について、二つのグラフや式をどのように用いればよいかを検討する場面を設定することが考えられる。具体的には、追いつく地点は二つの直線のグラフの交点の y 座標に表れることを確認し、「グラフの交点の y 座標を読み取ればよい。」、「二つの直線の式から連立方程式をつくり、それを解いて y の値を求めればよい。」などのように数学的に説明できるようにすることが大切である。その際、「交点の座標を読めば分かる。」のような十分でない説明を取り上げて吟味し、「二つの直線のグラフの交点から y 座標を読めば分かる。」のようなより洗練された表現に高めていくことが考えられる。

本問全体の学習指導に当たって

○　日常生活や社会の事象における問題の解決に数学を活用できるようにする

具体的な場面において、事象を理想化したり単純化したりして、日常生活や社会の事象における問題を数学の問題として捉え、数学を活用して解決できるように指導することが大切である。さらに、その解決の過程や結果を振り返り、新たな問題を見いだすなど、日常生活や社会の事象の考察や問題解決に数学を活用しようとする態度を育成することも大切である。

例えば、本問のように、駅伝についての速報を提示し、新緑大学が晴天大学に追いつく地点を予想する場面を設定することが考えられる。その際、新緑大学が晴天大学に追いつきそうであることは分かるが、速報からどの地点で追いつくのかを予想することは難しいことを確認することが考えられる。そこで、晴天大学と新緑大学の６区の各地点の記録を表にまとめ、グラフに表すと追いつく地点が分かるのではないかといった問題解決の見通しや構想を立てることが大切である。その上で、まとめた表から「走った時間が決まると、走った道のりが決まる」ことを読み取り、「走った道のりは、走った時間の関数である」と捉え、二人の選手の走る速さがそれぞれ一定であると仮定して考えるなど理想化したり単純化したりして、走った道のりは走った時間の一次関数であるとみなして、新緑大学が晴天大学に追いつく地点について話し合う活動を設定することが考えられる。

このような活動を通して、日常的な事象における数量の関係を一次関数とみなして問題解決することや、表、式、グラフを相互に関連付けて考察することなど、問題解決の過程を振り返り、関数を活用することのよさを実感できるようにすることが大切である。

授業アイディア例

「グラフを直線とみていることは、どんなことを仮定して考えているのだろうか」
～事象を理想化したり単純化したりして考えること～

速報を見て新緑大学が晴天大学に追いつきそうだと考え、その地点を予想しようとしています。そこで、「スタート地点からの道のりは時間の関数である」ことを確認し、６区の各地点の記録をまとめた表とグラフを用いて考えることにしました。

６区の各地点の記録をまとめた表

地点	スタート地点からの道のり	晴天大学	新緑大学
スタート地点	0 m	0 秒	100 秒
図書館前	1200 m	238 秒	316 秒
郵便局前	2800 m	567 秒	611 秒
駅前	4000 m	798 秒	824 秒

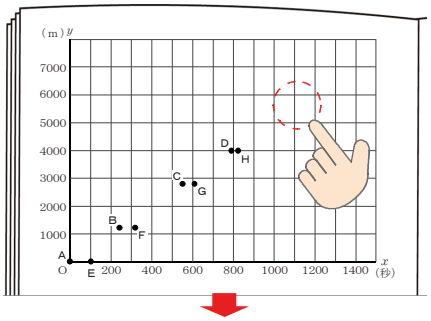
１．選手の走る道のりと時間の関係を、一次関数とみなすことについて話し合う。

教師：新緑大学が晴天大学に追いつくのは、スタートから何ｍの地点になるでしょうか。晴天大学の６区の選手がスタートしてからの時間をx秒、６区の選手の走った道のりをyｍとして考えてみましょう。

グラフに表すと分かるのではないかな。

点を打ってみよう。

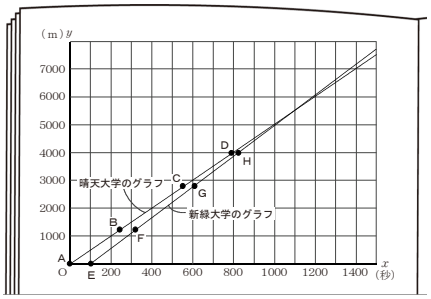
スタートから何ｍの地点で追いつきそうですか。グラフを見て考えてみましょう。



大体このあたり(☝)を見れば分かりそうだよ。

どうしてそのあたりだと分かるの。

4つの点が一直線上にあるように見えるから、直線をひいて考えたんだよ。



一直線上にあるように見えるからグラフを直線で考えたのですね。グラフをそれぞれ直線で表したことは、二人の選手の走る様子についてどのように考えたことになるのですか。

ポイント

直線のグラフということは、一次関数で傾きが一定になるよね。

傾きは変化の割合に等しいから、$\frac{(y\text{の増加量})}{(x\text{の増加量})}$で求められるね。

xの増加量は時間、yの増加量は道のりだから、変化の割合は速さを表しているよ。

つまり、グラフが直線だとすれば、変化の割合や傾きも一定だから、走る速さが一定と考えたことになるね。

グラフを直線で表したことは走る速さを一定であると考えたのですね。つまり、走る速さを一定であると考えることで、道のりは時間の一次関数とみなしているのですね。

ポイント

2．比例や一次関数を用いて、問題解決するための方法を話し合う。

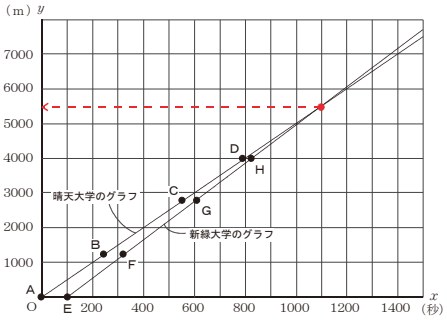
直線のグラフを用いて、スタートから何ｍの地点で追いつくかを調べましょう。

２つの直線のグラフは交わっているね。
追いつく地点は、グラフの交点を見れば分かりそうだよ。

交点は、２つのグラフでx座標、y座標がそれぞれ等しい点のことだね。

だから交点の座標は、追いつくまでの時間と道のりを表しているといえるよ。

追いつく地点は、交点のy座標を読めば分かるよ。だいたい5500だから、およそ5500ｍの地点で追いつくということだね。



選手の走る速さを一定であると考えて、グラフを直線で表しました。
選手の走る速さについて、表で確認してみましょう。

ポイント

速さは $\frac{(道のり)}{(時間)}$ で求められるので、変化の割合を調べればよいと思います。

選手の走る速さについて表で調べよう

速さは $\frac{(道のり)}{(時間)}$

道のりはyの増加量、
時間はxの増加量を表す

$\frac{(y\text{の増加量})}{(x\text{の増加量})}$＝変化の割合

		＋238	＋329	＋231
x	0	238	567	798
y	0	1200	2800	4000
		+1200	+1600	+1200

$\frac{1200}{238}$ ＝5.042…　　$\frac{1600}{329}$ ＝4.863…　　$\frac{1200}{231}$ ＝5.194…

変化の割合を確認してみたい！

$\frac{4000-0}{798-0}=\frac{4000}{798}$

調べて分かったこと
調べた区間の変化の割合はだいたい５になる

晴天大学の選手の走る速さについて、どのようなことが確認できたでしょうか。

変化の割合はだいたい「５」で同じだよ。

選手の走る速さは、いつもだいたい５ｍ/sだね。

調べた変化の割合からも、走る速さを一定とみることができそうだね。

新緑大学についても考えてみよう。

本授業アイディア例　活用のポイント！

- 表した直線のグラフや式が、どのような仮定に基づいているのかを捉えることが大切である。
- 事象を理想化したり単純化したりすることで表された直線のグラフを、事象に即して解釈することが大切である。