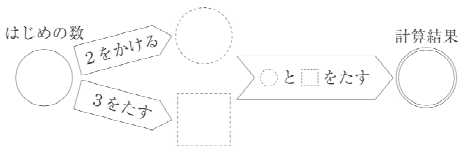
数学6 構想を立てて説明し、問題解決の過程や結果を振り返って考えること（整数の計算）

6 次の**図1**のように、はじめの数として○に整数を入れて計算し、計算結果を求めます。

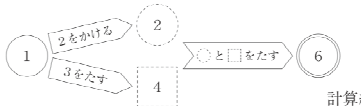
図1



夏希さんは、はじめの数として○にいろいろな整数を入れて計算しています。例えば、はじめの数が1、4、−5のときは、それぞれ下のような計算になります。

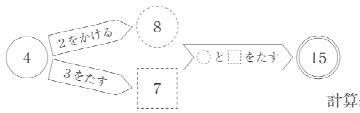
計算の例

はじめの数が1のとき



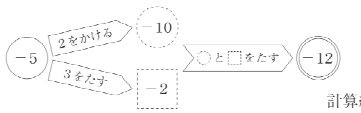
計算結果は 6 になる

はじめの数が4のとき



計算結果は 15 になる

はじめの数が−5のとき



計算結果は−12になる

次の(1)から(3)までの各問いに答えなさい。

(1) はじめの数が11のとき、計算結果を求めなさい。

(2) 夏希さんは、前ページの**計算の例**の計算結果がどんな数になるかを調べています。

1のとき　6　　6 = 3×2
4のとき　15　　15 = 3×5
−5のとき −12　　−12 = 3×(−4)

夏希さんは、これらのことから、「はじめの数としてどんな整数を入れても、計算結果はいつでも3の倍数になる」と予想しました。この予想が成り立つことは、次のように説明できます。

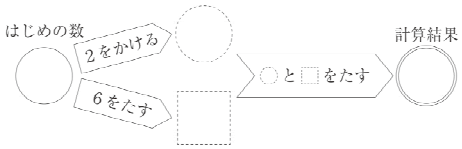
説明1

はじめの数として入れる整数をnとすると、はじめの数に2をかけた数は$n\times2$、3をたした数は$n+3$と表される。
計算結果は、
$n\times2+(n+3)$
$=2n+n+3$
$=3n+3$
$=3(n+1)$
$n+1$は整数だから、$3(n+1)$は3の倍数である。
したがって、はじめの数としてどんな整数を入れても、計算結果はいつでも3の倍数である。

ここで、夏希さんは、前ページの**図1**で、はじめの数としてどんな整数を入れても、計算結果がいつでも3の倍数になるのは、「3をたす」の「3」が3の倍数であるからではないかと考えました。

そこで、7ページの**図1**の「2をかける」のかける数「2」は変えずに、「3をたす」のたす数「3」を3の倍数である「6」に変えた次の**図2**をかきました。

図2



そして、はじめの数として2、5、−4を入れ、計算結果が3の倍数になるか調べました。

2のとき 12　　12 = 3×4
5のとき 21　　21 = 3×7
−4のとき −6　　−6 = 3×(−2)

調べたことから、夏希さんは、はじめの数としてどんな整数を入れても「はじめの数にかける数が2、たす数が6ならば、計算結果はいつでも3の倍数になる」と予想しました。
この予想が成り立つことを説明します。下の**説明2**を完成しなさい。

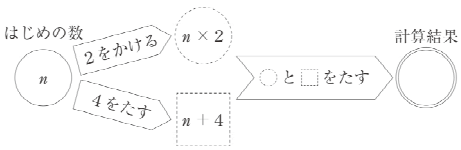
説明2

はじめの数として入れる整数をnとすると、はじめの数に2をかけた数は$n\times2$、6をたした数は$n+6$と表される。
計算結果は、

$n\times2+(n+6)$
$=$

(3) 夏希さんは、7ページの**図1**の「2をかける」のかける数「2」は変えずに、「3をたす」のたす数「3」を4の倍数である「4」や「8」に変えれば、計算結果がいつでも4の倍数になると考えました。そして、はじめの数としてどんな整数を入れても「はじめの数にかける数が2、たす数が4ならば、計算結果はいつでも4の倍数になる」と予想しました。
そこで、夏希さんは、はじめの数として入れる整数をnとし、次の**図3**をかき、下のように計算しました。

図3



夏希さんの計算

はじめの数として入れる整数をnとすると、はじめの数に2をかけた数は$n\times2$、4をたした数は$n+4$と表される。
計算結果は、
$n\times2+(n+4)$
$=2n+n+4$
$=3n+4$

計算結果が$3n+4$となることから、はじめの数としてどんな整数を入れても「はじめの数にかける数が2、たす数が4ならば、計算結果はいつでも4の倍数になる」という予想は成り立たないことがわかります。
上の**夏希さんの計算**をもとに考えたとき、はじめの数にかける数がいくつ、たす数がいくつならば、計算結果はいつでも4の倍数になると予想できますか。「〜〜ならば、……になる。」という形で書きなさい。

出題の趣旨

事象を数学的に考察する場面において、次のことができるかどうかをみる。
・事象の特徴を的確に捉えること
・筋道を立てて考え、事柄が成り立つ理由を説明すること
・問題解決の過程や結果を振り返り、事柄の特徴を数学的な表現を用いて説明すること

数に関する事象を考察する場面では、成り立ちそうな事柄を予想し、予想を確かめ、事柄が成り立つ理由について筋道を立てて考え説明すること、さらに、問題解決の過程や結果を振り返り、事象の特徴を的確に捉えることが大切である。

本問では、**図１**のはじめの数にいろいろな整数を入れて計算した結果について考察する場面を取り上げた。具体的には、**計算の例**から予想した事柄が成り立つことを確かめ、その上で、**図２**のように条件を変えたときに、予想した事柄が成り立つことを、文字を用いた式を使って説明する状況を設けた。さらに、**図３**のように条件を変えると予想した事柄が成り立たないことから、その事柄の結論は変えずに成り立つ事柄にするためには、前提をどのように変えればよいのかを見いだし、数学的に表現する文脈を設定した。

設問（１）

趣旨

問題場面における考察の対象を明確に捉えることができるかどうかをみる。

■学習指導要領における領域・内容

〔第１学年〕　A　数と式

(1)　正の数と負の数について、数学的活動を通して、次の事項を身に付けることができるよう指導する。

ア　次のような知識及び技能を身に付けること。

（ウ）具体的な場面で正の数と負の数を用いて表したり処理したりすること。

１．解答類型と反応率

問題番号		解答類型		反応率（%）	正答
6	(1)	1	36　と解答しているもの。	89.1	◎
		2	11　と解答しているもの。	0.1	
		99	上記以外の解答	8.5	
		0	無解答	2.4	

２．分析結果と課題

○　正答率は 89.1％ であり、問題場面における考察の対象を明確に捉えることができている。

３．学習指導に当たって

○　与えられた問題場面について具体的な数を用いて考察の対象を捉えることができるようにする

問題場面について考察の対象を明確に捉えるために、具体的な数を用いることができるように指導することが大切である。

本設問を使って授業を行う際には、与えられた問題場面を正しく捉えるために、**図１**におけるはじめの数に具体的な整数を入れて計算結果を求める場面を設定することが大切である。

設問（２）

趣旨

目的に応じて式を変形したり、その意味を読み取ったりして、事柄が成り立つ理由を説明することができるかどうかをみる。

■学習指導要領における領域・内容

〔第２学年〕　Ａ　数と式

(1)　文字を用いた式について、数学的活動を通して、次の事項を身に付けることができるよう指導する。

イ　次のような思考力、判断力、表現力等を身に付けること。

（イ）文字を用いた式を具体的な場面で活用すること。

１．解答類型と反応率

問題番号		解　答　類　型	反応率（%）	正答
6	(2)	（正答の条件） ＜３（n＋２）と計算している場合＞ 次の(a)、(b)について記述している。 (a)　n＋２ は整数だから、 (b)　３（n＋２）は３の倍数である。 ＜３n＋６ と計算している場合＞ 次の(c)、(d)について記述している。 (c)　３n、６が３の倍数で、３の倍数の和は３の倍数だから、 (d)　３n＋６ は３の倍数である。 （正答例） ・　３（n＋２） n＋２ は整数だから、３（n＋２）は３の倍数である。 したがって、はじめの数にかける数が２、たす数が６ならば、計算結果はいつでも３の倍数である。（解答類型１） ・　３n＋６ ３n、６が３の倍数で、３の倍数の和は３の倍数だから、３n＋６ は３の倍数である。 したがって、はじめの数にかける数が２、たす数が６ならば、計算結果はいつでも３の倍数である。（解答類型６）		

		1	3（$n+2$）	(a)、(b)について記述しているもの。	50.3	◎
		2		(a)のみを記述しているもの。 （正答例） ・　3（$n+2$） 　$n+2$ は整数だから。	0.1	○
		3		(b)のみを記述しているもの。 （正答例） ・　3（$n+2$） 　よって、3（$n+2$）は3の倍数である。	3.3	○
		4		(a)、(b)について記述していないもの。 （正答例） ・　3（$n+2$）	2.5	○
		5		(a)、(b)のいずれかの記述に誤りがあるもの。	1.0	
		6	$3n+6$	(c)、(d)について記述しているもの。	0.7	◎
		7		(c)のみを記述しているもの。 （正答例） ・　$3n+6$ 　$3n$、6が3の倍数だから。	0.0	○
		8		(d)のみを記述しているもの。 （正答例） ・　$3n+6$ 　よって、$3n+6$ は3の倍数である。	2.6	○
		9		(c)、(d)について記述していないもの。	6.1	
		10		(c)、(d)のいずれかの記述に誤りがあるもの。	0.1	
		11	3×□ の□に（$n+2$）以外の文字を用いた多項式又は単項式を入れて記述しているもの。		10.5	
		99	上記以外の解答		12.4	
		0	無解答		10.4	
				正答率	59.5	

２．分析結果と課題

○　解答類型11の具体的な例としては、以下のようなものがある。

（例）
・　$n \times 2 + (n + 6)$
$= 3n + 6$
$= 3(n + 1)$

・　$n \times 2 + (n + 6)$
$= 3n + 6$
$= 3(n + 6)$

このように記述した生徒は、はじめの数としてどんな整数を入れても、計算結果が３の倍数であることを説明するために、計算した式 $3n + 6$ を $3(n + 2)$ と変形することができなかったが、「３」に着目して変形しようとしていたと考えられる。

○　解答類型99の具体的な例としては、以下のようなものがある。

（例）
・　$n \times 2 + (n + 6)$
$= 3n + 6$
$= 6(n + 1)$

このように記述した生徒は、計算した式 $3n + 6$ の「６」に着目して変形しようとしていたと考えられる。

○　令和３年度【中学校】数学 6 (2)（正答率62.3%）で類題を出題している。「令和３年度【中学校】報告書」において、「目的に応じて式を変形したり、その意味を読み取ったりして、事柄が成り立つ理由を説明すること」に課題があると分析している。これに関連して本設問では、「はじめの数にかける数が２、たす数が６ならば、計算結果はいつでも３の倍数になることの説明を完成すること」をみる問題を出題した（正答率59.5%）。今回の結果から、目的に応じて式を変形したり、その意味を読み取ったりして、事柄が成り立つ理由を説明することに、引き続き課題がある。

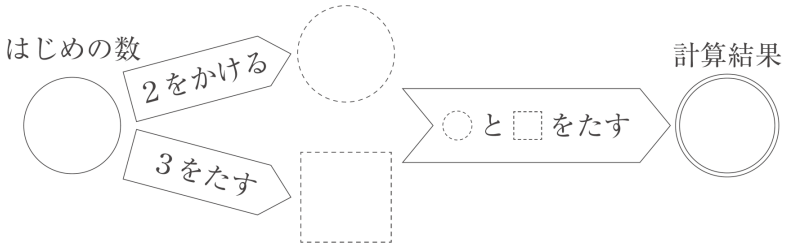
３．学習指導に当たって

○　事柄が成り立つ理由を、構想を立て、根拠を明確にして説明できるようにする

事柄が一般的に成り立つ理由を、構想を立てて説明する場面を設定し、文字式や言葉を用いて根拠を明らかにできるように指導することが大切である。

本設問を使って授業を行う際には、**図１**において、たす数が「３」のとき、はじめの数としてどんな整数を入れても計算結果が３の倍数になることから、たす数を３の倍数である「６」に変えても計算結果が３の倍数になるのではないかなどと予想を立てられるようにすることが大切である。その上で、予想した事柄である「はじめの数にかける数が２、たす数が６ならば、計算結果はいつでも３の倍数になる。」が成り立つことを説明するために、計算結果を表した式を「３×(整数)」の形にすればよいという見通しをもって、式を変形できるようにすることが大切である。その際、$n \times 2+(n+6)$ の式を計算し、$3n+6$ と表現した状態にとどまっているものを取り上げ、この式を用いて３の倍数になることを示すためには、「３×(整数)」という形の式で表せばよいことを確認し、$3n+6$ を $3(n+2)$ と変形できるようにするなど、説明を洗練させていく活動を取り入れることも大切である。

図１



設問（３）

趣旨

結論が成り立つための前提を、問題解決の過程や結果を振り返って考え、成り立つ事柄を見いだし、説明することができるかどうかをみる。

■学習指導要領における領域・内容

〔第２学年〕　A　数と式

(1)　文字を用いた式について、数学的活動を通して、次の事項を身に付けることができるよう指導する。

イ　次のような思考力、判断力、表現力等を身に付けること。

（イ）文字を用いた式を具体的な場面で活用すること。

1．解答類型と反応率

問題番号		解答類型		反応率(%)	正答
6	(3)	（正答の条件） 「○○ならば、◇◇になる。」という形で、次の(a)、(b)について記述しているもの。 (a)　○○が、「はじめの数にかける数が３、たす数が４」である。 (b)　◇◇が、「計算結果はいつでも４の倍数」である。 （正答例） ・　はじめの数にかける数が３、たす数が４ならば、計算結果はいつでも４の倍数になる。（解答類型１） ・　はじめの数にかける数が７、たす数が８ならば、計算結果はいつでも４の倍数になる。（解答類型４） ・　はじめの数にかける数が４の倍数から１ひいた数、たす数が４の倍数ならば、計算結果はいつでも４の倍数になる。（解答類型７）			
		1	(a)、(b)について記述しているもの。	32.3	◎
		2	上記１について、(a)についての記述が十分でなく、(b)について記述しているもの。 （正答例） ・　かける数が３、たす数が４ならば、計算結果はいつでも４の倍数になる。	3.1	○
		3	(a)のみを記述しているもの。（(a)についての記述が十分でないものを含む。）	0.4	
		4	上記１、２以外で、前提（○○）について、具体的な数を用いて、はじめの数にかける数、たす数を記述し、(b)について記述しているもの。	3.2	◎
		5	上記４について、前提（○○）についての記述が十分でなく、(b)について記述しているもの。 （正答例） ・　かける数が７、たす数が８ならば、計算結果はいつでも４の倍数になる。	0.4	○
		6	上記４、５について、(b)についての記述がないもの。	0.1	
		7	上記１、２、４、５以外で、前提（○○）について、言葉や文字式を用いて、はじめの数にかける数、たす数を記述し、(b)について記述しているもの。	2.1	◎
		8	上記７について、前提（○○）についての記述が十分でなく、(b)について記述しているもの。 （正答例） ・　かける数が４の倍数から１ひいた数、たす数が４の倍数ならば、計算結果はいつでも４の倍数になる。	0.4	○
		9	上記７、８について、(b)についての記述がないもの。	0.0	
		10	上記以外で、前提（○○）について、はじめの数にかける数として４の倍数を記述しているもの。（前提（○○）について、たす数の記述がないものや、(b)についての記述がないものを含む。）	8.6	

		11	上記10以外で、前提（○○）について、はじめの数にかける数又はたす数のどちらか一方のみを記述しているもの。((b)についての記述がないものを含む。)	5.2	
		99	上記以外の解答	19.7	
		0	無解答	24.3	
			正答率	41.5	

2．分析結果と課題

○　正答率は 41.5% であり、結論が成り立つための前提を、問題解決の過程や結果を振り返って考え、成り立つ事柄を見いだし、説明することに課題がある。

○　解答類型99の具体的な例としては、以下のようなものがある。

（例）
- はじめの数にかける数が３、たす数が１ならば、計算結果はいつでも４の倍数になる。
- はじめの数にかける数が１、たす数が４ならば、計算結果はいつでも４の倍数になる。

このように記述した生徒は、計算結果が４の倍数になるための前提について、はじめの数にかける数とたす数に着目したが、成り立つ事柄を見いだすことができなかったと考えられる。

また、以下のようなものがある。

（例）
- はじめの数が４の倍数ならば、計算結果はいつでも４の倍数になる。
- n が４の倍数ならば、計算結果はいつでも４の倍数になる。

このように記述した生徒は、計算結果が４の倍数になるための前提について、「はじめの数としてどんな整数を入れても」ということに基づいて説明することができなかったと考えられる。

３．学習指導に当たって

○　結論が成り立つための前提を、問題解決の過程や結果を振り返って捉え、見いだした事柄を数学的に表現できるようにする

予想した事柄が成り立つかどうかを、具体的な数や文字式を用いて調べる活動を通して、結論が成り立つための前提を捉え、見いだした事柄を数学的に表現できるように指導することが大切である。

本設問を使って授業を行う際には、**図１**と**図２**において、たす数が「３」や「６」のとき計算結果が３の倍数になったことから、かける数「２」は変えずに、たす数を「４」や「８」に変えると計算結果が４の倍数になるのではないかと予想する場面を取り入れることが考えられる。その上で、具体的な数や文字式を用いて予想した事柄が成り立つかどうかを調べる活動を設定することが考えられる。例えば、かける数「２」、たす数「４」とした**図３**の場合、**夏希さんの計算**のように、計算結果は $3n+4$ となり、「４×(整数)」の形に変形できないことから、たす数を「４」に変えると、計算結果が４の倍数にならないことを捉えられるようにすることが大切である。さらに、計算結果が４の倍数になるためには、$3n+4$ の「３」を「４」に変えればよいという見通しをもって、$n\times2$ と $n+4$ の「×２」と「＋４」をそれぞれ幾つにすればよいかを、それまでの問題解決の過程や結果を振り返って考察し表現する活動を設定することが考えられる。

図１

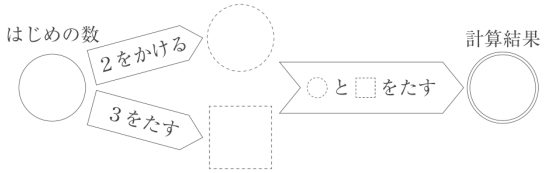


図２

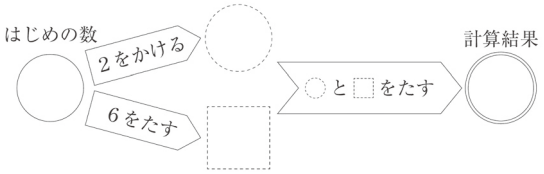
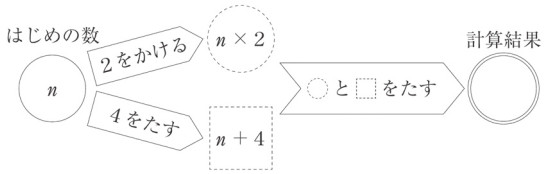


図３



夏希さんの計算

はじめの数として入れる整数を n とすると、はじめの数に２をかけた数は $n\times2$、４をたした数は $n+4$ と表される。
計算結果は、
$n\times2+(n+4)$
$=2n+n+4$
$=3n+4$

このような活動を通して、計算結果が４の倍数になるための前提を捉え、例えば、「はじめの数にかける数が３、たす数が４ならば、計算結果はいつでも４の倍数になる。」などと見いだした事柄を数学的に表現できるようにすることが大切である。

なお、上記のことを含めた「**授業アイディア例**」をpp. 43-44に示す。

本問全体の学習指導に当たって

○　問題解決の過程や結果を振り返りながら、発展的に考察することができるようにする

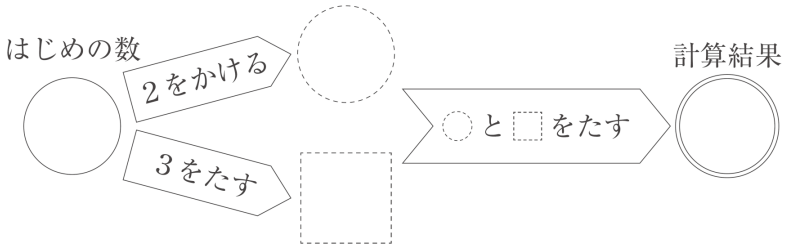
数学の事象から問題を見いだし、数学的な推論などによって問題を解決し、解決の過程や結果を振り返って、数量や図形などの性質を見いだし、発展的に考察できるようにすることが大切である。

例えば、**図１**において、「はじめの数としてどんな整数を入れても、計算結果は３の倍数になる。」が成り立つことを説明できたことから、その前提を変えた場合について、計算結果がどのような数になるのかを予想して、その予想が成り立つことを説明したり、説明を振り返って新たに成り立ちそうな事柄を予想したりする活動を設定することが大切である。具体的には、**図１**において、かける数「２」は変えずに、たす数「３」を「６」や「４」に変えた場合について計算結果がどのような数になるかを予想し、その予想が成り立つかどうかを具体例をあげたり、文字式を用いたりして考察することが考えられる。

また、予想が成り立たない場合にも、それまでの問題解決の過程や結果を基にして、その理由を考察し、結論が成り立つための前提を捉える活動を設定することが大切である。具体的には、**図１**のたす数「３」を「４」に変えると「計算結果は４の倍数になる」と予想した場合について、計算結果を表す文字式「$3n + 4$」から、予想が成り立たない理由を考察することが考えられる。その上で、「計算結果は４の倍数になる」という結論を成り立たせるためには、計算結果を表す式が「４×(整数)」の形に変形できればよいことを確認し、前提をどのようにすればよいかについて考察することが考えられる。

このような活動を通して、前提を変えた場合について、成り立つ事柄を予想してその予想が成り立つかどうかを調べたり、既に解決された問題の解決過程や結果を振り返って問題の前提と結論を関連付けて捉えたりするなど、発展的に考察することができるようにすることが大切である。

図１



授業アイディア例

「計算結果が４の倍数になるための条件を見いだそう」
～説明を振り返り、発展的に考察する～

前の時間では、はじめの数にどんな整数を入れても、かける数が「２」、たす数が「３」や「６」の場合には、計算結果は３の倍数となることを文字式を使って説明しました。
本時は、たす数を他の数に変えた場合について考えてみましょう。

１．これまでの問題解決の過程や結果を振り返り、新たな予想を立てる。

はじめの数にかける数が２、たす数が６ならば、計算結果はいつでも３の倍数になる。

（説明）
はじめの数として入れる整数をnとすると、はじめの数に２をかけた数は$n\times2$、６をたした数は$n+6$と表される。計算結果は
$n\times2+(n+6)$
$=2n+n+6$
$=3n+6$
$=3(n+2)$

$n+2$は整数だから、$3(n+2)$は３の倍数である。
したがって、はじめの数にどんな整数を入れても、計算結果はいつでも３の倍数である。

〔分かったこと〕
たす数が３や６ ならば 計算結果は３の倍数

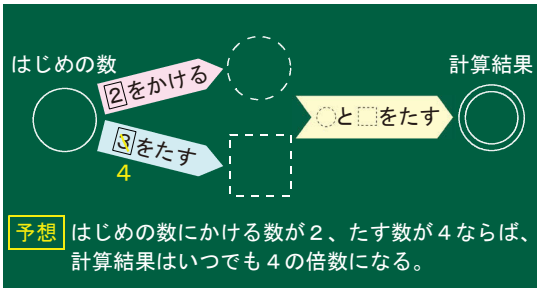
別の数に変えると計算結果はどうなる？

今日はたす数を「３」や「６」以外の数に変えた場合について考えましょう。
例えば、たす数を「４」や「８」に変えた場合、計算結果はどうなるでしょう。

教師

たす数が３や６のときに３の倍数になったから、たす数を４や８に変えれば４の倍数になるんじゃないかな。

では、たす数を４に変えた場合、計算結果が４の倍数になるかどうか調べてみましょう。



予想 はじめの数にかける数が２、たす数が４ならば、計算結果はいつでも４の倍数になる。

２．計算結果が４の倍数にならないことについて考察する。

調べた結果、予想は成り立つといえそうですか。

はじめの数に８を入れたら計算結果は 28 だから４の倍数になるけど、９を入れると計算結果は 31 だから４の倍数にはなりません。

はじめの数が８のとき
$8\times2+(8+4)$
$=28$
$=4\times7$

はじめの数が９のとき
$9\times2+(9+4)$
$=31$

文字式でも確認してみましょう。

はじめの数をnとすると計算結果は$3n+4$になるから、いつでも４の倍数になるとはいえません。

どうしてこの式からいつでも４の倍数になるとはいえないことが分かるの。

$3n+4$は$4\times$（整数）の形にできないからだよ。

なるほど。だからかける数が２でたす数が４だと４の倍数にはならないんだね。かける数やたす数を別の数に変えれば、計算結果をいつでも４の倍数にすることができるのかな。

はじめの数に入れる整数をnとすると
$n\times2+(n+4)$
$=2n+n+4$
$=3n+4$
$4\times$（整数）の形にできない！

3．計算結果がいつでも４の倍数になるための条件を見いだし、発展的に考察する。

計算結果がいつでも４の倍数になるためには、かける数やたす数をどのような数に変えればよいかを考えてみましょう。 ポイント

文字を使った計算の過程を振り返ってみてはどうかな。 ポイント

$3n+4$ が $4n+4$ になれば、$4(n+1)$ にできるから、$4\times$（整数）の形になるね。

$3n+4$ の４はたす数のことだね。この数は変えなくていいね。

$3n+4$ の $3n$ を $4n$ に変えるためにはどうしたらいいかな。

$2n+(n+4)$ の $2n$ の部分を $3n$ に変えると、$4n+4$ になるから、かける数２を３に変えればいいね。

$$\underbrace{n\times \overset{3}{\cancel{2}}}_{\cancel{2}\text{をかける}}+\underbrace{(n+4)}_{4\text{をたす}}$$

$$=\underbrace{\cancel{2n}}_{3n}+(n+4)$$

$4n+4$ になればいい

$$=\underbrace{\cancel{3n}}_{4n}+4$$

$4\times$（整数）になればいい

話し合ったことを全体で共有しましょう。

はじめの数にたす数は４のままで、かける数を３に変えると、計算結果はいつでも４×（整数）の形になるので４の倍数になることが分かりました。

かける数が３であれば、たす数を８や12に変えても計算結果は $4n+8$ や $4n+12$ になるから、４×（整数）の形にすることができるよ。

たす数は４のままで、かける数を７に変えると、計算結果は $8n+4$ になるから、$4(2n+1)$ に変形できるよ。

文字を使った計算の過程を振り返ることで、たす数やかける数がどのような数のときに計算結果が４の倍数になるかを調べることができましたね。他にどのようなことを考えてみたいですか。 ポイント

計算結果が５の倍数や６の倍数になる場合についても考えてみたいな。

「３をたす」の「たす」を「ひく」や「かける」に変えるとどうなるかな。

4．問題解決の過程を振り返る。

今日の授業で大切だと思ったことを振り返ってノートに書きましょう。

振り返り

文字式を使うことで、予想が成り立たないことを確認し、予想を成り立たせるためにはどうすればよいかを考えることができた。文字式を用いて考えたり文字式を使った説明を振り返ったりすることが大切だと感じた。

振り返り

１つの問題を解決したら、その問題から新しい問題を見つけて、それを解決することが大事だと思った。

計算結果がある数の倍数になることと、かける数やたす数には何か関係がありそうだから調べてみたい。

本授業アイディア例　活用のポイント！

- ある事柄が成り立つかどうかを文字式を基に判断したり、文字式の計算の過程や結果を事象と関連付けながら、ある事柄が成り立つための条件を見いだしたりする活動を設定することが大切である。
- 解決された問題やその解決の過程を振り返り、条件を変えた場合について考えるなど、新たな問題を見いだし解決する機会を設けることが大切である。