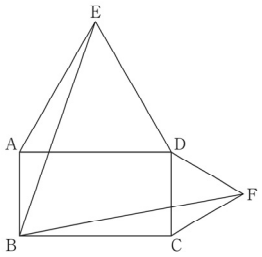
数学9　見いだした図形の性質を、与えられた条件を基に考察すること（四角形と正三角形）

9　次の**図1**は，長方形ABCDの外側に辺AD，DCを1辺とする正三角形ADE，DCFをかき，点Eと点B，点Bと点Fを結んだものです。

図1



琴音さんは，線分EBと線分BFについて次のことを予想しました。

予想

長方形ABCDの外側に辺AD，DCを1辺とする正三角形ADE，DCFがあるとき，EB＝BFになる。

次の(1)，(2)の各問いに答えなさい。

(1) 前ページの**予想**が成り立つことを，次のように証明しました。

証明

△ABEと△CFBにおいて，
正三角形の3つの辺はすべて等しいから，
　　EA＝AD
長方形の向かい合う辺は等しいから，
　　AD＝BC
よって，　EA＝BC　　……①
同じようにして，
　　AB＝CF　　……②
また，正三角形の1つの内角は60°であり，長方形の1つの内角は90°であるから，
　　∠EAB＝60°＋90°＝150°　……③
　　∠BCF＝90°＋60°＝150°　……④
③，④より，
　　∠EAB＝∠BCF　　……⑤
①，②，⑤より，［　　］がそれぞれ等しいから，
　　△ABE＝△CFB
合同な図形の対応する辺は等しいから，
　　EB＝BF

上の**証明**の［　　］に当てはまる言葉を書きなさい。

---

(2) 琴音さんは，次の**図2**や**図3**のように，21ページの**図1**の長方形ABCDの辺の長さをいろいろに変えた図をかきました。このときも，△ABE≡△CFBが成り立つので，EB＝BFがいえます。琴音さんは，EB＝BF以外にも，辺や角についていえることがないか調べました。

図2

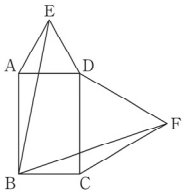
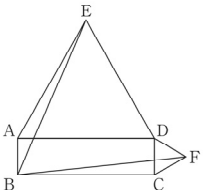


図3

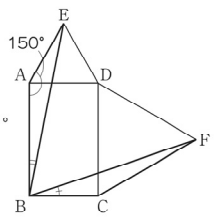


調べたことから，琴音さんは，長方形ABCDの辺の長さを変えても，∠EBFの大きさがいつでも60°になると予想し，次のように考えました。

琴音さんの考え

① ∠EBFについて，
∠ABC－90°より，
∠ABE＋∠CBF＝30°がいえれば，∠EBF＝90°－30°となり，
∠EBFが60°になることがいえる。

② ∠ABE＋∠CBF－30°になることは，△ABE≡△CFBからわかる等しい角と，
∠EAB＝150°を用いて示すことができる。



∠ABE＋∠CBF＝30°を示すことで，長方形ABCDの辺の長さを変えても，∠EBFの大きさがいつでも60°になることが説明できます。**琴音さんの考え**の②にある△ABE≡△CFBと∠EAB＝150°はすでにわかっていることとして，∠ABE＋∠CBF＝30°になることを下の**説明**の［　　］に示し，∠EBFの大きさがいつでも60°になることの**説明**を完成しなさい。

説明

［　　］

∠ABE＋∠CBF＝30°になることが示せたので，
∠EBF＝90°－(∠ABE＋∠CBF)より，
∠EBF＝90°－30°＝60°になる。

9

出題の趣旨

図形の性質を考察する場面において、次のことができるかどうかをみる。
・筋道を立てて考えること
・事象に即して解釈したことを数学的に表現すること
・事柄が成り立つ理由を数学的に説明すること

図形の性質を考察する場面では、成り立つと予想した事柄について、論理的に考察し、それを数学的に表現することが大切である。

本問では、長方形と正三角形によってできる図形の性質を見いだし、それが成り立つことを合同な図形の性質などを用いて考察する場面を取り上げた。具体的には、証明を読んで根拠として用いられている三角形の合同条件を見いだす状況を設けた。さらに、条件を保ったまま長方形の辺の長さを変えた場合に、新たに分かることとして、ある角の大きさについて成り立つ性質を見いだし、その性質が成り立つ理由を数学的に説明する文脈を設定した。

設問（１）

趣旨

証明の根拠として用いられている三角形の合同条件を理解しているかどうかをみる。

■学習指導要領における領域・内容

〔第２学年〕　Ｂ　図形

(2)　図形の合同について、数学的活動を通して、次の事項を身に付けることができるよう指導する。

ア　次のような知識及び技能を身に付けること。

（ア）平面図形の合同の意味及び三角形の合同条件について理解すること。

１．解答類型と反応率

問題番号		解答類型		反応率（%）	正答
9	(1)	1	２組の辺とその間の角　と解答しているもの。	73.6	◎
		2	２組の辺と１組の角　と解答しているもの。	0.7	
		3	３組の辺　と解答しているもの。	2.5	
		4	１組の辺とその両端の角　と解答しているもの。	2.5	
		99	上記以外の解答	13.4	
		0	無解答	7.3	

２．分析結果と課題

○　解答類型99の中には、「１組の辺とその間の角」や「２組の辺とその両端の角」という解答がみられた。これらは、三角形の合同条件を正しく理解していない生徒がいると考えられる。

３．学習指導に当たって

○　証明の根拠として用いられる三角形の合同条件を指摘できるようにする

証明を読み、結論を示すために仮定や図形の性質がどのように用いられているかを確認する場面を設定し、証明の根拠として用いられている三角形の合同条件を指摘できるように指導することが大切である。

本設問を使って授業を行う際には、証明を読み、当てはまる三角形の合同条件を確認するとともに、その合同条件を成り立たせる辺や角の関係を図と対応させて捉える活動を取り入れることが考えられる。その際、△ＡＢＥと△ＣＦＢを抜き出した図を基に、対応する辺や角を確認する場面を設定することが考えられる。

設問（2）

趣旨

筋道を立てて考え、事柄が成り立つ理由を説明することができるかどうかをみる。

■学習指導要領における領域・内容

〔第２学年〕　B　図形

(2)　図形の合同について、数学的活動を通して、次の事項を身に付けることができるよう指導する。

イ　次のような思考力、判断力、表現力等を身に付けること。

（イ）三角形や平行四辺形の基本的な性質などを具体的な場面で活用すること。

１．解答類型と反応率

問題番号		解答類型		反応率（%）	正答
9	(2)	（正答の条件） 次の(a)、(b)、(c)について記述しているもの。 (a)　∠AEB＝∠CBF (b)　∠ABE＋∠AEB＝30° (c)　∠ABE＋∠CBF＝30° （正答例） ・　△ABE≡△CFBより、合同な図形の対応する角は等しいから、 ∠AEB＝∠CBF　……① △ABEにおいて、三角形の内角の和は180°で、∠EAB＝150°であるから、 150°＋∠ABE＋∠AEB＝180° ∠ABE＋∠AEB＝30°　……② ①、②より ∠ABE＋∠CBF＝30° したがって、∠ABEと∠CBFの和は30°になる。 （解答類型１）			
		1	(a)、(b)、(c)について記述しているもの。	10.8	◎
		2	(a)、(b)、(c)について記述しているが、表現が十分でないもの。	0.8	○
		3	(a)、(b)について記述しているもの。((a)、(b)の表現が十分でないものを含む。)	1.0	○
		4	上記１～３以外で、(c)について記述し、∠ABEと∠CBFの和が30°になる理由を正しく説明しているもの。	0.6	◎
		5	上記４について、表現が十分でないもの。((c)について記述がないものを含む。)	0.2	○
		6	根拠として、∠EBF＝60°を用いているもの。	4.3	
		7	(a)について、又は、(a)、(c)について記述しているもの。((a)、(c)についての表現が十分でないものを含む。)	3.4	
		8	(b)について、又は、(b)、(c)について記述しているもの。((b)、(c)についての表現が十分でないものを含む。)	3.1	
		9	(c)について記述しているもの。((c)についての表現が十分でないものを含む。)	8.5	
		99	上記以外の解答	29.5	
		0	無解答	38.0	
			正答率	13.3	

２．分析結果と課題

○　正答率は 13.3% であり、筋道を立てて考え、事柄が成り立つ理由を説明することに課題がある。

○　解答類型９の具体的な例としては、以下のようなものがある。

（例）
・　∠EAB＝150°
　　よって、∠ABE ＋∠CBF＝30°

このように記述した生徒は、**琴音さんの考え**にある ∠EAB＝150° を用いて、∠ABE ＋∠CBF＝30° を説明しようとしたと考えられる。

○　解答類型99の具体的な例としては、以下のようなものがある。

（例）
・　仮定より、
　　△ABE≡△CFB
　　∠EAB＝150°

・　∠EAB＝150° より、三角形の内角の和は180°なので、
　　180° − 150° ＝ 30°

このように記述した生徒は、**琴音さんの考え**にある△ABE≡△CFBと∠EAB＝150° を用いようとしたと考えられる。
また、以下のようなものがある。

（例）
・　∠ABE＝30 ÷ 2 ＝ 15°
　　∠CBF＝30 ÷ 2 ＝ 15°

・　∠EAB＝150°、
　　∠AEB＝∠CBF＝∠ABE＝∠CFBより、
　　∠ABE＋∠CBF＝30°

このように記述した生徒は、∠ABEや∠CBFの大きさを具体的に求めようとしたり、∠ABEと∠CBFの大きさが等しいと捉えたりしたと考えられる。

３．学習指導に当たって

○　ある条件の下で成り立つ図形の性質を見いだし、それが成り立つ理由を数学的に説明できるようにする

結論を導くために何が分かればよいかを明らかにしたり、与えられた条件を整理したり、着目すべき性質や関係を見いだし、事柄が成り立つ理由を、筋道を立てて考えたりする活動を取り入れ、数学的に説明できるように指導することが大切である。

本設問を使って授業を行う際には、コンピュータなどを利用して長方形ABCDの辺の長さをいろいろに変えた図を観察し、線分EBと線分BFのなす角である∠EBFが60°になることを予想する場面を設定することが考えられる。その上で、予想した事柄が一般的に成り立つことの理由を数学的に説明する場面を設定することが考えられる。

例えば、∠EBFの大きさが60°になるかどうかを確かめるためには、∠ABEと∠CBFの和が分かればよいことを話し合うなどして、説明の見通しや構想を立てることが大切である。その際、同じ長さの辺や、同じ大きさの角に、印や記号を付けることで、図形の性質や関係を直観的に捉え、説明の見通しや構想を立てることが考えられる。さらに、他者との話し合いを通して、前提となる条件、正しいと認めた事柄、説明しようとする事柄を明らかにし、図形の性質や関係を論理的に考察し、表現することも考えられる。

また、予想した事柄「∠EBFが60°になる。」ことを説明する場面において、∠EBFが60°になることを示すためには、∠ABEと∠CBFの和が30°になることがいえればよいといった構想を立て、「∠ABEと∠CBFの和は30°になるか。」と焦点化して考察を進めることが考えられる。さらに、既に証明された△ABEと△CFBが合同であることや、∠ABEと∠AEBの和について考えることで、∠ABEと∠CBFの和が30°になるための根拠について明らかにすることが大切である。

本問全体の学習指導に当たって

○　観察や操作、実験などの活動を通して、図形の性質を見いだすことや、統合的・発展的に考察することができるようにする

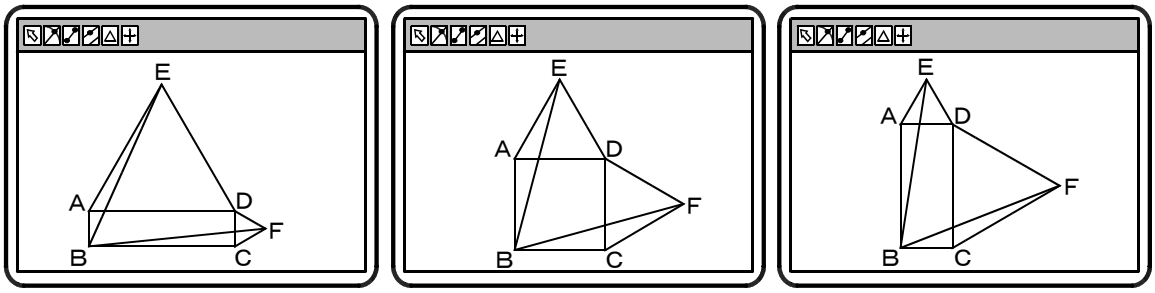
図形の性質を考察する場面では、観察や操作、実験などの活動を通して、予想した事柄が成り立つ理由を、筋道を立てて考えることができるようにするとともに、条件を変えても予想した事柄が成り立つか確かめたり、予想した事柄が成り立つための条件を見いだしたりするなど、統合的・発展的に考察することが大切である。

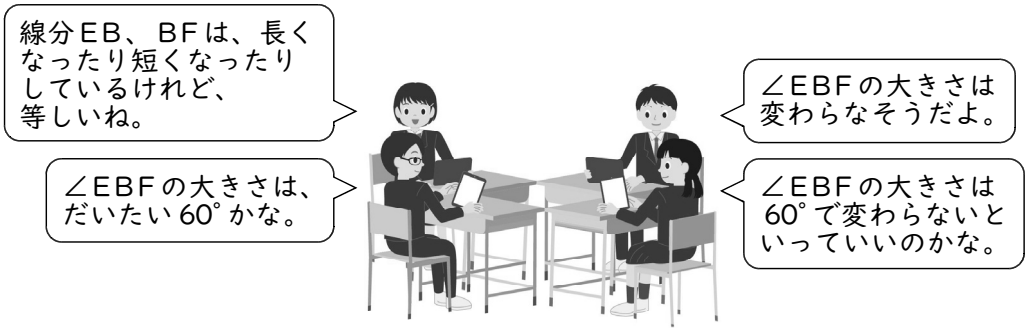
これらのことについて、次のような二つの場面を設定することが考えられる。

【観察や操作、実験などの活動を通して、成り立つと予想される事柄を見いだす場面】

本問のように、長方形ABCDの辺の長さを変えた図形においても、線分EBと線分BFの長さが等しいことを確認した後に、線分EBと線分BFのなす角に着目し、長方形ABCDの辺の長さを変えた図形を観察し、「∠EBFの大きさが60°になる。」といったように、成り立つと予想される事柄を見いだす場面を設定することが大切である。また、長方形の大きさや形を変えた図形を観察する際には、コンピュータを活用することも効果的である。１人１台端末を利用し、成り立つと予想される図形の性質を見いだし、それを他の生徒と共有するなどの活動も考えられる。

１人１台端末を用いて、長方形の大きさや形を変えた図形を観察する場面（例）





9

【統合的・発展的に考察する場面】

本問題の**図１**について、長方形ＡＢＣＤの辺の長さをいろいろに変えても、「ＥＢ＝ＢＦ」や「∠ＥＢＦ＝60°」が成り立つことを数学的に説明した後、四角形ＡＢＣＤや△ＡＤＥ、△ＤＣＦの形に着目し、条件を変えて考える場面を設定することが考えられる。その上で、長方形ＡＢＣＤを平行四辺形などの他の四角形に変えても、長方形ＡＢＣＤのときと同じ結論である「ＥＢ＝ＢＦ」や「∠ＥＢＦ＝60°」が得られるかどうかについて、統合的・発展的に考察することが大切である。例えば、長方形ＡＢＣＤを他の四角形に変えても、線分ＥＢと線分ＢＦが等しくなるといえるかどうかを考察することが考えられる。

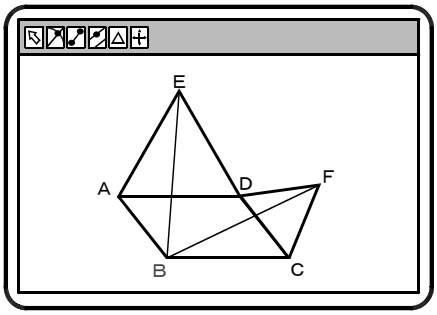
長方形を他の四角形に変えて、成り立つ事柄について考察する場面（例）

四角形ＡＢＣＤが長方形のとき、ＥＢ＝ＢＦになること、∠ＥＢＦ＝60°になることが分かりました。次に、どのようなことを考えてみたいですか。

長方形から平行四辺形に変えたらどうなるのかな。

コンピュータを使って調べてみようよ。

いろいろ動かしていたら、△ＡＢＥができないときがあったよ。



他の四角形に変えると、どうなるのかな。

【予想】
平行四辺形、ひし形、正方形のとき、ＥＢ＝ＢＦになる。
台形、普通の四角形のとき、ＥＢ＝ＢＦにならない。

まず、平行四辺形ＡＢＣＤにおいて、線分ＥＢとＢＦの長さは等しくなるといえるでしょうか。このことについて証明してみましょう。ただし、平行四辺形ＡＢＣＤの∠ＡＢＣの大きさを60°より大きい場合として考えます。

△ＡＢＥと△ＣＦＢの合同を示すことで、ＥＢ＝ＢＦになることがいえるね。

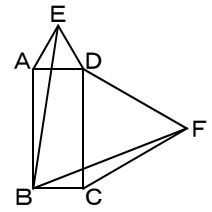
長方形のときの証明と同じような感じがするね。

長方形のときの証明が使えるんじゃないかな。

平行四辺形に変えることで証明はどこが変わるのかな。

長方形のときの証明と、変わるところや変わらないところについて確認し、変わる部分について、下線を引いてみましょう。

【四角形ＡＢＣＤが長方形のときの証明】
△ＡＢＥと△ＣＦＢにおいて、
正三角形の３つの辺はすべて等しいから、
ＥＡ＝ＡＤ
長方形の向かい合う辺は等しいから、
ＡＤ＝ＢＣ
よって、ＥＡ＝ＢＣ　……①
同じようにして、
ＡＢ＝ＣＦ　……②
また、正三角形の１つの内角は60°であり、
長方形の一つの内角は90°であるから、
∠ＥＡＢ＝60°＋90°＝150°　……③
∠ＢＣＦ＝60°＋90°＝150°　……④
③、④より、
∠ＥＡＢ＝∠ＢＣＦ　……⑤
①、②、⑤より、２組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから、
△ＡＢＥ≡△ＣＦＢ
合同な図形の対応する辺は等しいから、
ＥＢ＝ＢＦ



長方形の証明をみて、変わるところや変わらないところについて発表しましょう。

変わるところは、長方形と書かれているところだね。

△ＡＢＥと△ＣＦＢが合同になることを根拠にすることは変わらないね。

平行四辺形に変えても、対辺が等しいということは変わらないね。

∠ＢＡＤと∠ＤＣＢの大きさが90°から変わるね。でも、対角は等しいから、２つの角が等しいことは変わらないよ。

平行四辺形の場合でも、長方形のときの証明の一部を書き換えることで、ＥＢ＝ＢＦになることを示すことができました。
ひし形や正方形の場合でも、ＥＢ＝ＢＦになることを示すことができますか。

平行四辺形の証明を書き換えれば示すことができるよ。

平行四辺形のところを、ひし形や正方形にすると、他の部分も書き換える必要があるのかな。

ひし形も正方形も、２組の向かい合う辺が等しく、２組の向かい合う角が等しい四角形だよ。書き換える必要はないね。

なるほど。平行四辺形で成り立ったことは、ひし形や正方形でもいえるということだね。

【四角形ＡＢＣＤが平行四辺形のときの証明】
△ＡＢＥと△ＣＦＢにおいて、
正三角形の３つの辺はすべて等しいから、
ＥＡ＝ＡＤ
平行四辺形の向かい合う辺は等しいから、
ＡＤ＝ＢＣ
よって、ＥＡ＝ＢＣ　……①
同じようにして、
ＡＢ＝ＣＦ　……②
また、正三角形の１つの内角は60°であり、
平行四辺形の向かい合う角の大きさは等しいから、
∠ＢＡＤ＝∠ＤＣＢ　……③
∠ＥＡＢ＝60°＋∠ＢＡＤ　……④
∠ＢＣＦ＝60°＋∠ＤＣＢ　……⑤
③、④、⑤より、
∠ＥＡＢ＝∠ＢＣＦ　……⑥
①、②、⑥より、２組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから、
△ＡＢＥ≡△ＣＦＢ
合同な図形の対応する辺は等しいから、
ＥＢ＝ＢＦ

つまり、どんな四角形においてＥＢ＝ＢＦが成り立つのでしょうか。

四角形ＡＢＣＤが平行四辺形であればよいということです。

平行四辺形には、長方形、ひし形、正方形も含むということだね。

今日の授業で大切だと思ったことを振り返り、それをノートに書いてみましょう。

振り返り

長方形のときに成り立ったことが、他の四角形に変えても成り立つことが分かった。四角形を変えても、同じことが成り立つかどうかを考えることが大切だと思った。長方形や平行四辺形、ひし形、正方形によって、それぞれ証明が違うと思っていたけれど、実は平行四辺形のときの証明ですべて説明できると分かって驚いた。

振り返り

今回の学習では、証明を読むことで、考察を進めることができた。条件を変えたとき、書いた証明が使えるかどうか考えることが大切だと思った。書いた証明を読むことで、考えを広げたり、新しい発見をしたりすることができた。これからも証明を書くことだけでなく、証明を読むことも大切にしたい。