数学3　反例

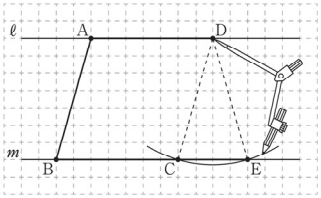
3　優真さんは，次の**予想**がいつでも成り立つかどうかについて考えています。

予想

１組の向かい合う辺が平行で，もう１組の向かい合う辺の長さが等しい四角形ならば，その四角形は平行四辺形である。

上の**予想**がいつでも成り立つかどうかを，図をかいて考えることにしました。下の**図**のように，はじめに，平行な２直線ℓ，m上に３点A，B，Dをとり，線分AB，ADをかきました。次に，点Dを中心として，線分ABの長さと等しい半径の円をかいたところ，直線mと２点C，Eで交わり，平行四辺形になる四角形ABCDと，平行四辺形にならない四角形ABEDの２つがかけました。

図



前ページの**予想**がいつでも成り立つかどうかを示すことについて，正しく述べたものを，下の**ア**から**エ**までの中から１つ選びなさい。

ア　**予想**がいつでも成り立つことを示すためには，**図**のように平行四辺形になる四角形ABCDが１つかければよい。

イ　**予想**がいつでも成り立つことを示すためには，点A，B，Dの位置を変えて，**図**の平行四辺形ABCDのほかに，平行四辺形になる四角形をかく必要がある。

ウ　**予想**がいつでも成り立つとはいえないことを示すためには，**図**のように平行四辺形にならない四角形ABEDが１つかければよい。

エ　**予想**がいつでも成り立つとはいえないことを示すためには，点A，B，Dの位置を変えて，**図**の四角形ABEDのほかに，平行四辺形にならない四角形をかく必要がある。

出題の趣旨

命題や推測した事柄について考察する場面において、次のことができるかどうかをみる。
・筋道を立てて考えること
・反例の意味を理解していること

命題や推測した事柄について考察する場面では、命題や事柄が常に成り立つことを説明するだけでなく、常に成り立つとは限らないことも説明できるようにすることが大切である。

本問は、反例の意味を理解しているかどうかをみる問題である。反例は、命題や事柄が常に成り立つとは限らないことを説明する際に必要であることから出題した。

■学習指導要領における領域・内容

〔第２学年〕　B　図形

(2)　図形の合同について、数学的活動を通して、次の事項を身に付けることができるよう指導する。

ア　次のような知識及び技能を身に付けること。

（イ）証明の必要性と意味及びその方法について理解すること。

１．解答類型と反応率

問題番号		解答類型		反応率(%)	正答
3		1	**ア**　と解答しているもの。	13.9	
		2	**イ**　と解答しているもの。	27.0	
		3	**ウ**　と解答しているもの。	45.5	◎
		4	**エ**　と解答しているもの。	13.2	
		99	上記以外の解答	0.0	
		0	無解答	0.4	

２．分析結果と課題

○　正答率は 45.5% であり、反例の意味の理解に課題がある。

○　解答類型４の反応率は 13.2% である。この中には、**図**のように平行四辺形ではない四角形ABEDが１つかけたことから、**予想**が成り立つとはいえないと考え、それを示すために、反例を複数あげる必要があると捉えた生徒がいると考えられる。

○　解答類型１の反応率は 13.9% である。この中には、**図**のように平行四辺形ABCDが１つかけたことから、**予想**がいつでも成り立つと捉えた生徒がいると考えられる。

○　解答類型２の反応率は 27.0% である。この中には、**図**のように平行四辺形ABCDが１つかけたことから、**予想**がいつでも成り立つと考え、さらに点Ａ、Ｂ、Ｄの位置を変えて、**図**の平行四辺形ABCD以外の平行四辺形を見付けることができれば、**予想**がいつでも成り立つことを示すことができると捉えた生徒がいると考えられる。

３．学習指導に当たって

○　反例の意味を理解できるようにする

命題や幾つかの場合から推測した事柄について考察する場面では、命題や事柄が常に成り立つことを説明するだけでなく、常に成り立つとは限らないことも説明できるようにすることが大切である。また、命題が常に成り立つとは限らないことを示すには反例を一つあげればよいことや、反例は命題の仮定を満たしているが、結論を満たしていない例であることを理解できるように指導することも大切である。

本問を使って授業を行う際には、一組の向かい合う辺が平行で、もう一組の向かい合う辺の長さが等しいという条件を満たす四角形を作図し、作図した四角形がいつでも平行四辺形になるかどうかを考察する活動を取り入れることが考えられる。その際、作図した四角形の中には、反例となる四角形（等脚台形）があることに気付き、**予想**が常に成り立つとは限らないことを説明することが考えられる。

○　反例を見いだし用いることで命題が常に成り立つとは限らないことを説明できるようにする

ある事象について予想した事柄が成り立つかどうかを判断するために、仮定を満たすような具体例を幾つかあげ、それらが結論を満たすかどうかを調べる活動を取り入れることが考えられる。その際、事柄が成り立つと考えた場合には根拠を明らかにして説明したり、いつでも成り立つとは限らないと考えた場合には反例をあげて説明したりする活動を取り入れることが大切である。

例えば、第２学年における、数に関する性質を調べるといった学習において、平成26年度【中学校】数学B[2]「偶数の四則計算」で取り上げたように、「２つの偶数の和は、偶数になる」ことについて説明したあとに、２つの偶数の積に着目し、具体的な幾つかの数についての計算などを通して、２つの偶数の積は常に８の倍数になるかどうかを判断する活動を取り入れることが考えられる。このとき、いろいろな２つの偶数の積を取り上げ、その積の中に８の倍数にならないものを見いだし、反例としてあげることで、この事柄が常に成り立つとは限らないことを説明できるようにすることが大切である。

上記のように、「A数と式」の領域などにおいても、反例をあげて命題が常に成り立つとは限らないことを説明することがあることから、場面に応じて適宜指導することが大切である。

（参照）

①「平成26年度【中学校】解説資料」pp. 97-103
https://www.nier.go.jp/14chousa/pdf/14kaisetsu_chuu_suugaku.pdf#page=99

②「平成26年度【中学校】報告書」pp. 104-109
https://www.nier.go.jp/14chousakekkahoukoku/report/data/mmath.pdf#page=108

③「平成26年度【中学校】授業アイディア例」pp. 17-18
https://www.nier.go.jp/jugyourei/h26/data/m.pdf#page=18

①平成26年度【中学校】解説資料　②平成26年度【中学校】報告書　③平成26年度【中学校】授業アイディア例

3

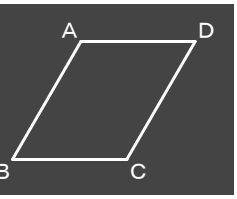
授業アイディア例

平行四辺形になるための条件について考えよう
～反例をあげて、命題が常に成り立つとは限らないことを説明する～

前の時間までに、平行四辺形になるための条件について調べてきました。本時は、向かい合う辺に着目して、この他にも平行四辺形になるための条件があるかどうか考えます。

1．向かい合う辺に着目して、平行四辺形になるための条件を振り返る。

平行四辺形になるための条件
①２組の向かい合う辺がそれぞれが平行である。（定義）
②２組の向かい合う辺がそれぞれ等しい。
③２組の向かい合う角がそれぞれ等しい。
④対角線がそれぞれの中点で交わる。
⑤１組の向かい合う辺が平行で、その長さが等しい。

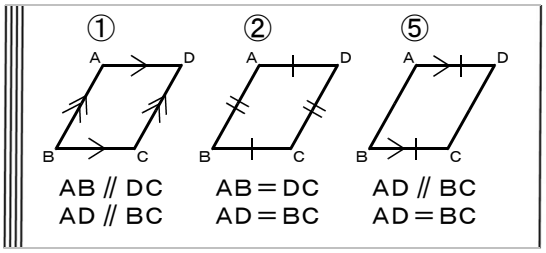


前の時間までに、平行四辺形になるための条件を調べてきました。
平行四辺形になるための条件の中で、向かい合う辺に着目したものは何ですか。

①、②、⑤です。

①、②、⑤について、記号を使って表してみましょう。

①はＡＢ // ＤＣ、ＡＤ // ＢＣ、
②はＡＢ＝ＤＣ、ＡＤ＝ＢＣ、
⑤はＡＤ // ＢＣ、ＡＤ＝ＢＣです。

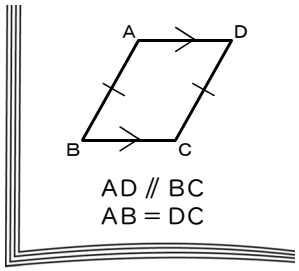


①、②、⑤の他に、向かい合う辺に着目した平行四辺形になるための条件は考えられないでしょうか。

Ｉ組の向かい合う辺が平行で、もうＩ組の向かい合う辺の長さが等しいときは調べていないよ。

四角形ＡＢＣＤでいうと、ＡＤとＢＣが平行で、ＡＢとＤＣの長さを等しくすれば、平行四辺形になるということかな。

この条件でかいてみよう。

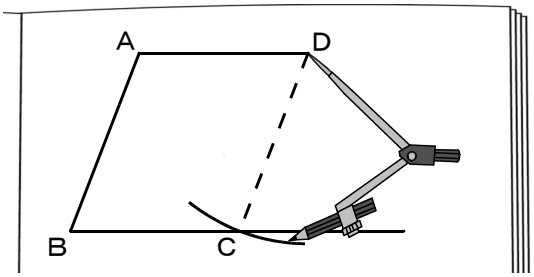


2．見いだした事柄が常に成り立つかどうか図をかいて調べる。

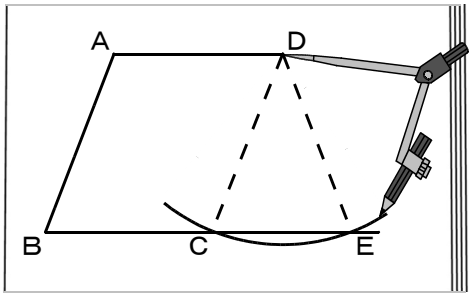
それでは、四角形ＡＢＣＤで、ＡＤ // ＢＣ、ＡＢ＝ＤＣとなるように、図をかいてみましょう。平行四辺形はできるでしょうか。

ポイント

平行四辺形がかけました。



平行四辺形にならない四角形もかけました。これは台形かな。



ＡＢの長さと同じ長さを取って、点Ｄを中心にコンパスでかくと、平行四辺形になるものとならないものができたよ。

平行四辺形がかけたから、「１組の向かい合う辺が平行で、もう１組の向かい合う辺の長さが等しい」は、平行四辺形になるための条件でいいんじゃないかな。

「１組の向かい合う辺が平行で、もう１組の向かい合う辺の長さが等しい四角形ならば、平行四辺形になる。」ということは、いつでも成り立つといってよいですか。

いつでも平行四辺形になるかどうかは、点Ａ、Ｂ、Ｄの位置を変えて他にも平行四辺形ができるかどうか確かめてみる必要があるよ。

幾つか調べただけでは、いつでも成り立つとはいえないから、証明しなければならないんじゃないかな。

でも、いつでも成り立つのかな。この条件でかいたら、平行四辺形にならない四角形もかけたよ。

それって、反例のことだね。

３．反例の必要性や意味を確認し、事柄が常に成り立つとはいえないことを説明する。

反例とはどういうことでしたか。

仮定を満たしているけれど、結論を満たしていない例です。ここでは、１組の向かい合う辺が平行で、もう１組の向かい合う辺の長さが等しいけれど、平行四辺形にならないという例です。

反例をあげることで、どんなことがいえますか。

反例をただ１つあげることで、事柄がいつでも成り立つとは限らないことを示すことができます。

平行四辺形になるための条件について考えてきました。明らかになったことを、まとめましょう。

ポイント

反例を１つあげることで、「１組の向かい合う辺が平行で、もう１組の向かい合う辺の長さが等しい四角形ならば、平行四辺形になる。」は、平行四辺形になるための条件ではないということが分かりました。

本授業アイディア例　活用のポイント！

- 推測した事柄について考察する場面で、事柄の理解を深めたり反例を見付けたりするために、仮定に当てはまる図をかいたり、具体的な数をあげたりする場面を設定することが大切である。
- 事柄が常に成り立つとは限らないことを説明する場面を設定し、反例の必要性や意味を確認するとともに、反例のよさを実感できるようにすることが大切である。